

High school geometry theorems

Hilbert's axiomatic system.

Formalizovano od strane: Sana Stojanovic Djurdjevic

Dokaz generisan uz pomoć: ArgoGeoChecker.

30.03.2018.

Teorema 1 (th_12.01.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku pokazati da postoji tačka B tako da važi $B \in r$ i $B \in p$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave r i p se seku postoji tačka B tako da važi $r \neq p$ i $B \in r$ i $B \in p$ (aksioma D6).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $B \in r$ i $B \in p$.

QED

Teorema 2 (th_12.02.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ pokazati da postoji tačka C tako da važi $C \in s$ i $C \in p$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave s i p se seku postoji tačka C tako da važi $s \neq p$ i $C \in s$ i $C \in p$ (aksioma D6).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $C \in s$ i $C \in p$.

QED

Teorema 3 (th_12.03.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ pokazati da postoji tačka D tako da važi $D \in r$ i $D \in q$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave r i q se seku postoji tačka D tako da važi $r \neq q$ i $D \in r$ i $D \in q$ (aksioma D6).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $D \in r$ i $D \in q$.

QED

Teorema 4 (th_12.04.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ pokazati da postoji tačka E tako da važi $E \in s$ i $E \in q$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave s i q se seku postoji tačka E tako da važi $s \neq q$ i $E \in s$ i $E \in q$ (aksioma D6).

2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in s$ i $E \in q$.

QED

Teorema 5 (th_12.05.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ pokazati da važi $\neg col(A, B, C)$.*

Dokaz:

1. Važi $A = B$ ili $A \neq B$.
2. Pretpostavimo da važi: $A = B$.
3. Na osnovu činjenica $B \in p$ i $A = B$ važi $A \in p$.
4. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
5. Pretpostavimo da važi: $A \neq B$.
6. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
7. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
8. Na osnovu činjenica $C \in s$ i $B = C$ važi $B \in s$.
9. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $A \in s$ i $B \in s$ važi $r = s$ (aksioma I2).
10. Na osnovu činjenica $r \neq s$ i $r = s$ dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
12. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in p$ i $C \in p$ i $A \notin p$ važi $\neg col(B, C, A)$ (aksioma D1a).
13. Na osnovu činjenice $\neg col(B, C, A)$ važi $\neg col(B, A, C)$ i $\neg col(C, B, A)$ i $\neg col(C, A, B)$ i $\neg col(A, B, C)$ i $\neg col(A, C, B)$ (aksioma sym_ncol).
14. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $\neg col(A, B, C)$.
15. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
16. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 6 (th_12.06.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ i $\neg col(A, B, C)$ pokazati da postoji ravan α tako da važi $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $\neg col(A, B, C)$ postoji ravan α tako da važi $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ (aksioma I4a).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$.

QED

Teorema 7 (th_12.07.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ i $\neg col(A, B, C)$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ pokazati da važi $r \in \alpha$ i $s \in \alpha$.*

Dokaz:

1. Važi $A = B$ ili $A \neq B$.
2. Pretpostavimo da važi: $A = B$.

3. Na osnovu činjenica $B \in p$ i $A = B$ važi $A \in p$.
4. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
5. Pretpostavimo da važi: $A \neq B$.
6. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ važi $r \in \alpha$ (aksioma I6).
7. Važi $A = C$ ili $A \neq C$.
8. Pretpostavimo da važi: $A = C$.
9. Na osnovu činjenica $C \in p$ i $A = C$ važi $A \in p$.
10. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi: $A \neq C$.
12. Na osnovu činjenica $A \neq C$ i $A \in s$ i $C \in s$ i $A \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $s \in \alpha$ (aksioma I6).
13. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $r \in \alpha$ i $s \in \alpha$.
14. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
15. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 8 (th_12.08.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ i $\neg \text{col}(A, B, C)$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $r \in \alpha$ i $s \in \alpha$ pokazati da važi $p \in \alpha$ i $q \in \alpha$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $r \in \alpha$ i $D \in r$ važi $D \in \alpha$ (aksioma D11).
2. Na osnovu činjenica $s \in \alpha$ i $E \in s$ važi $E \in \alpha$ (aksioma D11).
3. Na osnovu činjenica $A \in r$ i $B \in r$ i $B \in r$ važi $\text{col}(A, B, B)$ (aksioma D1).
4. Važi $A = D$ ili $A \neq D$.
5. Pretpostavimo da važi: $A = D$.
6. Na osnovu činjenica $D \in q$ i $A = D$ važi $A \in q$.
7. Na osnovu činjenica $A \notin q$ i $A \in q$ dobijamo kontradikciju.
8. Pretpostavimo da važi: $A \neq D$.
9. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
10. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
11. Na osnovu činjenica $\text{col}(A, B, B)$ i $B = C$ važi $\text{col}(A, B, C)$.
12. Na osnovu činjenica $\neg \text{col}(A, B, C)$ i $\text{col}(A, B, C)$ dobijamo kontradikciju.
13. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
14. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in p$ i $C \in p$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $p \in \alpha$ (aksioma I6).
15. Važi $D = E$ ili $D \neq E$.
16. Pretpostavimo da važi: $D = E$.
17. Na osnovu činjenica $E \in s$ i $D = E$ važi $D \in s$.
18. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in r$ i $D \in r$ i $A \in s$ i $D \in s$ važi $r = s$ (aksioma I2).
19. Na osnovu činjenica $r \neq s$ i $r = s$ dobijamo kontradikciju.
20. Pretpostavimo da važi: $D \neq E$.

21. Na osnovu činjenica $D \neq E$ i $D \in q$ i $E \in q$ i $D \in \alpha$ i $E \in \alpha$ važi $q \in \alpha$ (aksioma I6).
22. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $p \in \alpha$ i $q \in \alpha$.
23. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
24. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
25. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
- QED
-