Teoreme srednjoškolske geometrije

Hilbertov aksiomatski sistem.
Formalizovano od strane: Sana Stojanović Đurđević
Dokaz generisan uz pomoć: ArgoGeoChecker.

07.01.2017.

Teorema 1 (th_prop2_01.) *Pod pretpostavkom da važi* $B \neq C$ *i* $A \neq B$ *i* $A \neq C$ *pokazati da postoji tačka* D *tako da važi* $D \neq A$ *i* $D \neq B$ *i* $AB \cong BD$ *i* $BD \cong DA$.

Teorema 2 (th_prop2_02.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *pokazati da postoji prava* p *tako da važi* $on(D, p)$ *i* $on(C, p)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $D \neq C$ važi $C \neq D$.
2. Na osnovu činjenice $C \neq D$ postoji prava u tako da važi $on(C, u)$ i $on(D, u)$ (aksioma $lines\_and\_circles1$).
3. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $on(D, u)$ i $on(C, u)$.

QED

Teorema 3 (th_prop2_03.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D, p)$ *i* $on(C, p)$ *pokazati da postoji prava* q *tako da važi* $on(D, q)$ *i* $on(A, q)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $D \neq A$ važi $A \neq D$.
2. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji prava s tako da važi $on(A, s)$ i $on(D, s)$ (aksioma $lines\_and\_circles1$).
3. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $on(D, s)$ i $on(A, s)$.

QED

Teorema 4 (th_prop2_04.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D, p)$ *i* $on(C, p)$ *i* $on(D, q)$ *i* $on(A, q)$ *pokazati da postoji circle alpha, tako da važi* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $A \neq B$ postoji circle $alpha$ tako da važi A je centar kruga α i B leži na krugu α (aksioma $lines\_and\_circles2$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica A je centar kruga α i B leži na krugu α.

QED

Teorema 5 (th_prop2_05.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D, p)$ *i* $on(C, p)$ *i* $on(D, q)$ *i* $on(A, q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *pokazati da postoji tačka* E *tako da važi* $on(E, q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D, A, E)$.

1. Na osnovu činjenice A je centar kruga α važi A se nalazi unutar kruga α (aksioma $generalities3$).
2. Na osnovu činjenica A se nalazi unutar kruga α i $on(A,q)$ i $D \neq A$ i $on(D,q)$ postoji tačka E tako da važi E leži na krugu α i $on(E,q)$ i $bet(E,A,D)$ (aksioma $intersections5$).
3. Na osnovu činjenice $bet(E,A,D)$ važi $bet(D,A,E)$ i $E \neq A$ i $E \neq D$ i $\neg bet(A,E,D)$ (aksioma $bet1$).
4. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $on(E,q)$ i E leži na krugu α i $bet(D,A,E)$.

QED

Teorema 6 (th_prop2_06.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *pokazati da važi* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(D,A,E)$ važi $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ (aksioma $segment1$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$.

QED

Teorema 7 (th_prop2_07.) *Pod pretpostavkom da važi* $B \neq C$ *i* $A \neq B$ *i* $A \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $D \neq B$ *i* $AB \cong BD$ *i* $BD \cong DA$ *i* $on(D,t)$ *i* $on(A,t)$ *i* $on(D,u)$ *i* $on(B,u)$ *i* B *je centar kruga* $\alpha 2$ *i* C *leži na krugu* $\alpha 2$ *i* $on(I,u)$ *i* I *leži na krugu* $\alpha 2$ *i* $bet(D,B,I)$ *i* $segment\_add(D,B,B,I,D,I)$ *pokazati da važi* $segment\_add(D,I,D,A,B,I)$.

Teorema 8 (th_prop2_08.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *pokazati da važi* $cong\_less(D,C,D,E)$.

Dokaz:

1. Važi $DA \cong AD$ (aksioma $metric3$).
2. Na osnovu činjenice $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ važi $cong\_less(D,A,D,E)$ i $cong\_less(A,E,D,E)$ (aksioma $cong\_less1$).
3. Na osnovu činjenica $cong\_less(D,A,D,E)$ i $DA \cong AD$ važi $cong\_less(A,D,D,E)$ (aksioma $cong\_less3$).
4. Na osnovu činjenica $cong\_less(A,D,D,E)$ i $AD \cong DC$ važi $cong\_less(D,C,D,E)$ (aksioma $cong\_less3$).
5. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $cong\_less(D,C,D,E)$.

QED

Teorema 9 (th_prop2_09.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *i* $cong\_less(D,C,D,E)$ *pokazati da postoji circle beta, tako da važi* D *je centar kruga* β *i* E *leži na krugu* β.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(D,A,E)$ važi $bet(E,A,D)$ i $D \neq A$ i $D \neq E$ i $\neg bet(A,D,E)$ (aksioma $bet1$).
2. Na osnovu činjenice $D \neq E$ postoji circle $beta5$ tako da važi D je centar kruga $\beta 5$

3. Zaključak teoreme sledi iz činjenica D je centar kruga $\beta 5$ i E leži na krugu $\beta 5$.
QED

Teorema 10 (th_prop2_10.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *i* $cong\_less(D,C,D,E)$ *i* D *je centar kruga* β *i* E *leži na krugu* β *pokazati da važi* C *se nalazi unutar kruga* β.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica D je centar kruga β i E leži na krugu β i $cong\_less(D,C,D,E)$ važi C se nalazi unutar kruga β (aksioma $segment4\_1$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenice C se nalazi unutar kruga β.

QED

Teorema 11 (th_prop2_11.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *i* $cong\_less(D,C,D,E)$ *i* D *je centar kruga* β *i* E *leži na krugu* β *i* C *se nalazi unutar kruga* β *pokazati da postoji tačka* F *tako da važi* F *leži na krugu* β *i* $on(F,p)$ *i* $bet(D,C,F)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica C se nalazi unutar kruga β i $on(C,p)$ i $D \neq C$ i $on(D,p)$ postoji tačka F tako da važi F leži na krugu β i $on(F,p)$ i $bet(F,C,D)$ (aksioma $intersections5$).
2. Na osnovu činjenice $bet(F,C,D)$ važi $bet(D,C,F)$ i $F \neq C$ i $F \neq D$ i $\neg bet(C,F,D)$ (aksioma $bet1$).
3. Zaključak teoreme sledi iz činjenica F leži na krugu β i $on(F,p)$ i $bet(D,C,F)$.

QED

Teorema 12 (th_prop2_12.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *i* $cong\_less(D,C,D,E)$ *i* D *je centar kruga* β *i* E *leži na krugu* β *i* C *se nalazi unutar kruga* β *i* F *leži na krugu* β *i* $on(F,p)$ *i* $bet(D,C,F)$ *pokazati da važi* $segment\_add(D,C,C,F,D,F)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(D,C,F)$ važi $segment\_add(D,C,C,F,D,F)$ (aksioma $segment1$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $segment\_add(D,C,C,F,D,F)$.

QED

Teorema 13 (th_prop2_13.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *i* $cong\_less(D,C,D,E)$ *i* D *je centar kruga* β *i* E *leži na krugu* β *i* C *se nalazi unutar kruga* β *i* F *leži na krugu* β *i* $on(F,p)$ *i* $bet(D,C,F)$ *i* $segment\_add(D,C,C,F,D,F)$ *pokazati da važi* $DF \cong DE$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica D je centar kruga β i E leži na krugu β i F leži na krugu β važi $DF \cong DE$ (aksioma $segment3\_2$).

QED

Teorema 14 (th_prop2_14.) *Pod pretpostavkom da važi* $B \neq C$ *i* $A \neq B$ *i* $A \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $D \neq B$ *i* $AB \cong BD$ *i* $BD \cong DA$ *i* $on(D,t)$ *i* $on(A,t)$ *i* $on(D,u)$ *i* $on(B,u)$ *i* B *je centar kruga* $\alpha 2$ *i* C *leži na krugu* $\alpha 2$ *i* $on(I,u)$ *i* I *leži na krugu* $\alpha 2$ *i* $bet(D,B,I)$ *i* $segment\_add(D,B,B,I,D,I)$ *i* $segment\_add(D,I,D,A,B,I)$ *i* $cong\_less(D,A,D,I)$ *i* D *je centar kruga* $\alpha 3$ *i* I *leži na krugu* $\alpha 3$ *i* A *se nalazi unutar kruga* $\alpha 3$ *i* K *leži na krugu* $\alpha 3$ *i* $on(K,t)$ *i* $bet(D,A,K)$ *i* $segment\_add(D,A,A,K,D,K)$ *i* $DK \cong DI$ *pokazati da važi* $segment\_add(D,A,B,I,D,K)$.

Teorema 15 (th_prop2_15.) *Pod pretpostavkom da važi* $B \neq C$ *i* $A \neq B$ *i* $A \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $D \neq B$ *i* $AB \cong BD$ *i* $BD \cong DA$ *i* $on(D,t)$ *i* $on(A,t)$ *i* $on(D,u)$ *i* $on(B,u)$ *i* B *je centar kruga* $\alpha 2$ *i* C *leži na krugu* $\alpha 2$ *i* $on(I,u)$ *i* I *leži na krugu* $\alpha 2$ *i* $bet(D,B,I)$ *i* $segment\_add(D,B,B,I,D,I)$ *i* $segment\_add(D,I,D,A,B,I)$ *i* $cong\_less(D,A,D,I)$ *i* D *je centar kruga* $\alpha 3$ *i* I *leži na krugu* $\alpha 3$ *i* A *se nalazi unutar kruga* $\alpha 3$ *i* K *leži na krugu* $\alpha 3$ *i* $on(K,t)$ *i* $bet(D,A,K)$ *i* $segment\_add(D,A,A,K,D,K)$ *i* $DK \cong DI$ *i* $segment\_add(D,A,B,I,D,K)$ *pokazati da važi* $AK \cong BI$.

Teorema 16 (th_prop2_16.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *i* $cong\_less(D,C,D,E)$ *i* D *je centar kruga* β *i* E *leži na krugu* β *i* C *se nalazi unutar kruga* β *i* F *leži na krugu* β *i* $on(F,p)$ *i* $bet(D,C,F)$ *i* $segment\_add(D,C,C,F,D,F)$ *i* $DF \cong DE$ *i* $segment\_add(D,C,A,E,D,F)$ *i* $CF \cong AE$ *pokazati da važi* $AE \cong AB$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica A je centar kruga α i B leži na krugu α i E leži na krugu α važi $AE \cong AB$ (aksioma $segment3\_2$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $AE \cong AB$.

QED

Teorema 17 (th_prop2_17.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \neq B$ *i* $C \neq A$ *i* $C \neq B$ *i* $D \neq C$ *i* $D \neq A$ *i* $CA \cong AD$ *i* $AD \cong DC$ *i* $on(D,p)$ *i* $on(C,p)$ *i* $on(D,q)$ *i* $on(A,q)$ *i* A *je centar kruga* α *i* B *leži na krugu* α *i* $on(E,q)$ *i* E *leži na krugu* α *i* $bet(D,A,E)$ *i* $segment\_add(D,A,A,E,D,E)$ *i* $segment\_add(D,E,D,C,A,E)$ *i* $cong\_less(D,C,D,E)$ *i* D *je centar kruga* β *i* E *leži na krugu* β *i* C *se nalazi unutar kruga* β *i* F *leži na krugu* β *i* $on(F,p)$ *i* $bet(D,C,F)$ *i* $segment\_add(D,C,C,F,D,F)$ *i* $DF \cong DE$ *i* $segment\_add(D,C,A,E,D,F)$ *i* $CF \cong AE$ *i* $AE \cong AB$ *pokazati da važi* $CF \cong AB$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $CF \cong AE$ važi $AE \cong CF$ (aksioma $cong\_symmetry$).
2. Na osnovu činjenica $AE \cong AB$ i $AE \cong CF$ važi $AB \cong CF$ (aksioma $cong\_transitivity$).
3. Na osnovu činjenice $AB \cong CF$ važi $CF \cong AB$ (aksioma $cong\_symmetry$).
4. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $CF \cong AB$.

QED
