Teoreme srednjoškolske geometrije

Hilbertov aksiomatski sistem.
Formalizovano od strane: Sana Stojanović Đurđević
Dokaz generisan uz pomoć: ArgoGeoChecker.

07.01.2017.

Teorema 1 (th_12_01.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin p$ *i* $A \notin q$ *i* $r \neq s$ *i* $A \in r$ *i* $A \in s$ *i prave* r *i* p *se seku i prave* r *i* q *se seku i prave* s *i* p *se seku i prave* s *i* q *se seku pokazati da postoji tačka* B *tako da važi* $B \in r$ *i* $B \in p$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave r i p se seku postoji tačka B tako da važi $r \neq p$ i $B \in r$ i $B \in p$ (aksioma $D6$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $B \in r$ i $B \in p$.

QED

Teorema 2 (th_12_02.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin p$ *i* $A \notin q$ *i* $r \neq s$ *i* $A \in r$ *i* $A \in s$ *i prave* r *i* p *se seku i prave* r *i* q *se seku i prave* s *i* p *se seku i prave* s *i* q *se seku i* $B \in r$ *i* $B \in p$ *pokazati da postoji tačka* C *tako da važi* $C \in s$ *i* $C \in p$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave s i p se seku postoji tačka C tako da važi $s \neq p$ i $C \in s$ i $C \in p$ (aksioma $D6$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $C \in s$ i $C \in p$.

QED

Teorema 3 (th_12_03.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin p$ *i* $A \notin q$ *i* $r \neq s$ *i* $A \in r$ *i* $A \in s$ *i prave* r *i* p *se seku i prave* r *i* q *se seku i prave* s *i* p *se seku i prave* s *i* q *se seku i* $B \in r$ *i* $B \in p$ *i* $C \in s$ *i* $C \in p$ *pokazati da postoji tačka* D *tako da važi* $D \in r$ *i* $D \in q$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave r i q se seku postoji tačka D tako da važi $r \neq q$ i $D \in r$ i $D \in q$ (aksioma $D6$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $D \in r$ i $D \in q$.

QED

Teorema 4 (th_12_04.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin p$ *i* $A \notin q$ *i* $r \neq s$ *i* $A \in r$ *i* $A \in s$ *i prave* r *i* p *se seku i prave* r *i* q *se seku i prave* s *i* p *se seku i prave* s *i* q *se seku i* $B \in r$ *i* $B \in p$ *i* $C \in s$ *i* $C \in p$ *i* $D \in r$ *i* $D \in q$ *pokazati da postoji tačka* E *tako da važi* $E \in s$ *i* $E \in q$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice prave s i q se seku postoji tačka E tako da važi $s \neq q$ i $E \in s$ i $E \in q$ (aksioma $D6$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in s$ i $E \in q$.

QED

Teorema 5 (th_12_05.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ pokazati da važi $\neg col(A, B, C)$.*

Dokaz:

1. Važi $A = B$ ili $A \neq B$.
   2. Pretpostavimo da važi: $A = B$.
      3. Na osnovu činjenica $B \in p$ i $A = B$ važi $A \in p$.
      4. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
   5. Pretpostavimo da važi: $A \neq B$.
      6. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
         7. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
            8. Na osnovu činjenica $C \in s$ i $B = C$ važi $B \in s$.
            9. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $A \in s$ i $B \in s$ važi $r = s$ (aksioma $I2$).
            10. Na osnovu činjenica $r \neq s$ i $r = s$ dobijamo kontradikciju.
         11. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
            12. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in p$ i $C \in p$ i $A \notin p$ važi $\neg col(B, C, A)$ (aksioma $D1a$).
            13. Na osnovu činjenice $\neg col(B, C, A)$ važi $\neg col(B, A, C)$ i $\neg col(C, B, A)$ i $\neg col(C, A, B)$ i $\neg col(A, B, C)$ i $\neg col(A, C, B)$ (aksioma *sym_ncol*).
            14. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $\neg col(A, B, C)$.
      15. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
16. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 6 (th_12_06.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ i $\neg col(A, B, C)$ pokazati da postoji ravan α tako da važi $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $\neg col(A, B, C)$ postoji ravan α tako da važi $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ (aksioma $I4a$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$.

QED

Teorema 7 (th_12_07.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ i $\neg col(A, B, C)$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ pokazati da važi $r \in \alpha$ i $s \in \alpha$.*

Dokaz:

1. Važi $A = B$ ili $A \neq B$.
   2. Pretpostavimo da važi: $A = B$.
      3. Na osnovu činjenica $B \in p$ i $A = B$ važi $A \in p$.
      4. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
   5. Pretpostavimo da važi: $A \neq B$.
      6. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ važi $r \in \alpha$ (aksioma $I6$).
      7. Važi $A = C$ ili $A \neq C$.

9. Na osnovu činjenica $C \in p$ i $A = C$ važi $A \in p$.
10. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi: $A \neq C$.
12. Na osnovu činjenica $A \neq C$ i $A \in s$ i $C \in s$ i $A \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $s \in \alpha$ (aksioma $I6$).
13. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $r \in \alpha$ i $s \in \alpha$.
14. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
15. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 8 (th_12_08.) *Pod pretpostavkom da važi $A \notin p$ i $A \notin q$ i $r \neq s$ i $A \in r$ i $A \in s$ i prave r i p se seku i prave r i q se seku i prave s i p se seku i prave s i q se seku i $B \in r$ i $B \in p$ i $C \in s$ i $C \in p$ i $D \in r$ i $D \in q$ i $E \in s$ i $E \in q$ i $\neg col(A, B, C)$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $r \in \alpha$ i $s \in \alpha$ pokazati da važi $p \in \alpha$ i $q \in \alpha$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $r \in \alpha$ i $D \in r$ važi $D \in \alpha$ (aksioma $D11$).
2. Na osnovu činjenica $s \in \alpha$ i $E \in s$ važi $E \in \alpha$ (aksioma $D11$).
3. Na osnovu činjenica $A \in r$ i $B \in r$ i $B \in r$ važi $col(A, B, B)$ (aksioma $D1$).
4. Važi $A = D$ ili $A \neq D$.
5. Pretpostavimo da važi: $A = D$.
6. Na osnovu činjenica $D \in q$ i $A = D$ važi $A \in q$.
7. Na osnovu činjenica $A \notin q$ i $A \in q$ dobijamo kontradikciju.
8. Pretpostavimo da važi: $A \neq D$.
9. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
10. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
11. Na osnovu činjenica $col(A, B, B)$ i $B = C$ važi $col(A, B, C)$.
12. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, C)$ i $col(A, B, C)$ dobijamo kontradikciju.
13. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
14. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in p$ i $C \in p$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $p \in \alpha$ (aksioma $I6$).
15. Važi $D = E$ ili $D \neq E$.
16. Pretpostavimo da važi: $D = E$.
17. Na osnovu činjenica $E \in s$ i $D = E$ važi $D \in s$.
18. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in r$ i $D \in r$ i $A \in s$ i $D \in s$ važi $r = s$ (aksioma $I2$).
19. Na osnovu činjenica $r \neq s$ i $r = s$ dobijamo kontradikciju.
20. Pretpostavimo da važi: $D \neq E$.
21. Na osnovu činjenica $D \neq E$ i $D \in q$ i $E \in q$ i $D \in \alpha$ i $E \in \alpha$ važi $q \in \alpha$ (aksioma $I6$).
22. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $p \in \alpha$ i $q \in \alpha$.
23. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
24. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
25. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED
