Teoreme srednjoškolske geometrije

Hilbertov aksiomatski sistem.
Formalizovano od strane: Sana Stojanović Đurđević
Dokaz generisan uz pomoć: ArgoGeoChecker.

07.01.2017.

Teorema 1 (th_14_01.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin \alpha$ *i* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $\neg col(A, B, C)$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $B \in q$ *i* $C \in q$ *i* $C \in r$ *i* $A \in r$ *i* $D \in \alpha$ *i* $D \in p$ *i* $E \in \alpha$ *i* $E \in q$ *i* $F \in \alpha$ *i* $F \in r$ *pokazati da postoji ravan* β *tako da važi* $A \in \beta$ *i* $B \in \beta$ *i* $C \in \beta$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $\neg col(A, B, C)$ postoji ravan β tako da važi $A \in \beta$ i $B \in \beta$ i $C \in \beta$ (aksioma $I4a$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in \beta$ i $B \in \beta$ i $C \in \beta$.

QED

Teorema 2 (th_14_02.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin \alpha$ *i* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $\neg col(A, B, C)$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $B \in q$ *i* $C \in q$ *i* $C \in r$ *i* $A \in r$ *i* $D \in \alpha$ *i* $D \in p$ *i* $E \in \alpha$ *i* $E \in q$ *i* $F \in \alpha$ *i* $F \in r$ *i* $A \in \beta$ *i* $B \in \beta$ *i* $C \in \beta$ *pokazati da važi* $p \in \beta$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $A \in r$ i $A \in r$ i $C \in r$ važi $col(A, A, C)$ (aksioma $D1$).
2. Važi $A = B$ ili $A \neq B$.
   3. Pretpostavimo da važi: $A = B$.
      4. Na osnovu činjenica $col(A, A, C)$ i $A = B$ važi $col(A, B, C)$.
      5. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, C)$ i $col(A, B, C)$ dobijamo kontradikciju.
   6. Pretpostavimo da važi: $A \neq B$.
      7. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $A \in \beta$ i $B \in \beta$ važi $p \in \beta$ (aksioma $I6$).
      8. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $p \in \beta$.
9. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 3 (th_14_03.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin \alpha$ *i* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $\neg col(A, B, C)$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $B \in q$ *i* $C \in q$ *i* $C \in r$ *i* $A \in r$ *i* $D \in \alpha$ *i* $D \in p$ *i* $E \in \alpha$ *i* $E \in q$ *i* $F \in \alpha$ *i* $F \in r$ *i* $A \in \beta$ *i* $B \in \beta$ *i* $C \in \beta$ *i* $p \in \beta$ *pokazati da važi* $q \in \beta$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $B \in p$ važi $col(A, B, B)$ (aksioma $D1$).
2. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
   3. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
      4. Na osnovu činjenica $col(A, B, B)$ i $B = C$ važi $col(A, B, C)$.
      5. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, C)$ i $col(A, B, C)$ dobijamo kontradikciju.
   6. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
      7. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in q$ i $C \in q$ i $B \in \beta$ i $C \in \beta$ važi $q \in \beta$

8. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $q \in \beta$.

9. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 4 (th_14_04.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin \alpha$ *i* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $\neg col(A, B, C)$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $B \in q$ *i* $C \in q$ *i* $C \in r$ *i* $A \in r$ *i* $D \in \alpha$ *i* $D \in p$ *i* $E \in \alpha$ *i* $E \in q$ *i* $F \in \alpha$ *i* $F \in r$ *i* $A \in \beta$ *i* $B \in \beta$ *i* $C \in \beta$ *i* $p \in \beta$ *i* $q \in \beta$ *pokazati da važi* $r \in \beta$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $A \in p$ važi $col(A, B, A)$ (aksioma $D1$).
2. Važi $A = C$ ili $A \neq C$.
   3. Pretpostavimo da važi: $A = C$.
      4. Na osnovu činjenica $col(A, B, A)$ i $A = C$ važi $col(A, B, C)$.
      5. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, C)$ i $col(A, B, C)$ dobijamo kontradikciju.
   6. Pretpostavimo da važi: $A \neq C$.
      7. Na osnovu činjenica $A \neq C$ i $A \in r$ i $C \in r$ i $A \in \beta$ i $C \in \beta$ važi $r \in \beta$ (aksioma $I6$).
      8. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $r \in \beta$.
9. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 5 (th_14_05.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin \alpha$ *i* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $\neg col(A, B, C)$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $B \in q$ *i* $C \in q$ *i* $C \in r$ *i* $A \in r$ *i* $D \in \alpha$ *i* $D \in p$ *i* $E \in \alpha$ *i* $E \in q$ *i* $F \in \alpha$ *i* $F \in r$ *i* $A \in \beta$ *i* $B \in \beta$ *i* $C \in \beta$ *i* $p \in \beta$ *i* $q \in \beta$ *i* $r \in \beta$ *pokazati da važi* $D \in \beta$ *i* $E \in \beta$ *i* $F \in \beta$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $p \in \beta$ i $D \in p$ važi $D \in \beta$ (aksioma $D11$).
2. Na osnovu činjenica $q \in \beta$ i $E \in q$ važi $E \in \beta$ (aksioma $D11$).
3. Na osnovu činjenica $r \in \beta$ i $F \in r$ važi $F \in \beta$ (aksioma $D11$).
4. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $D \in \beta$ i $E \in \beta$ i $F \in \beta$.

QED

Teorema 6 (th_14_06.) *Pod pretpostavkom da važi* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $D \notin \alpha$ *i* $\neg col(B, C, D)$ *i* $B \in t$ *i* $C \in t$ *i* $C \in u$ *i* $D \in u$ *i* $D \in v$ *i* $B \in v$ *i* $I \in \alpha$ *i* $I \in t$ *i* $J \in \alpha$ *i* $J \in u$ *i* $K \in \alpha$ *i* $K \in v$ *i* $B \in \gamma3$ *i* $C \in \gamma3$ *i* $D \in \gamma3$ *i* $t \in \gamma3$ *i* $u \in \gamma3$ *i* $v \in \gamma3$ *i* $I \in \gamma3$ *i* $J \in \gamma3$ *i* $K \in \gamma3$ *pokazati da postoji prava* $t1$ *tako da važi* $t1 \in \alpha$ *i* $t1 \in \gamma3$.

Teorema 7 (th_14_07.) *Pod pretpostavkom da važi* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $D \notin \alpha$ *i* $\neg col(B, C, D)$ *i* $B \in t$ *i* $C \in t$ *i* $C \in u$ *i* $D \in u$ *i* $D \in v$ *i* $B \in v$ *i* $I \in \alpha$ *i* $I \in t$ *i* $J \in \alpha$ *i* $J \in u$ *i* $K \in \alpha$ *i* $K \in v$ *i* $B \in \gamma3$ *i* $C \in \gamma3$ *i* $D \in \gamma3$ *i* $t \in \gamma3$ *i* $u \in \gamma3$ *i* $v \in \gamma3$ *i* $I \in \gamma3$ *i* $J \in \gamma3$ *i* $K \in \gamma3$ *i* $t1 \in \alpha$ *i* $t1 \in \gamma3$ *pokazati da postoji tačka* N *i tačka* P *tako da važi* $N \neq P$ *i* $N \in t1$ *i* $P \in t1$.

Teorema 8 (th_14_08.) *Pod pretpostavkom da važi* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $D \notin \alpha$ *i* $\neg col(B, C, D)$ *i* $B \in t$ *i* $C \in t$ *i* $C \in u$ *i* $D \in u$ *i* $D \in v$ *i* $B \in v$ *i* $I \in \alpha$ *i* $I \in t$ *i* $J \in \alpha$ *i* $J \in u$ *i* $K \in \alpha$ *i* $K \in v$ *i* $B \in \gamma3$ *i* $C \in \gamma3$ *i* $D \in \gamma3$ *i* $t \in \gamma3$ *i* $u \in \gamma3$ *i* $v \in \gamma3$ *i* $I \in \gamma3$ *i* $J \in \gamma3$ *i* $K \in \gamma3$ *i* $t1 \in \alpha$ *i* $t1 \in \gamma3$ *i* $N \neq P$ *i* $N \in t1$ *i* $P \in t1$ *pokazati da važi* $I \in t1$ *i* $J \in t1$ *i* $K \in t1$.

Teorema 9 (th_14_09.) *Pod pretpostavkom da važi* $A \notin \alpha$ *i* $B \notin \alpha$ *i* $C \notin \alpha$ *i* $\neg col(A,B,C)$ *i* $A \in p$ *i* $B \in p$ *i* $B \in q$ *i* $C \in q$ *i* $C \in r$ *i* $A \in r$ *i* $D \in \alpha$ *i* $D \in p$ *i* $E \in \alpha$ *i* $E \in q$ *i* $F \in \alpha$ *i* $F \in r$ *i* $A \in \beta$ *i* $B \in \beta$ *i* $C \in \beta$ *i* $p \in \beta$ *i* $q \in \beta$ *i* $r \in \beta$ *i* $D \in \beta$ *i* $E \in \beta$ *i* $F \in \beta$ *i* $s \in \alpha$ *i* $s \in \beta$ *i* $G \neq I$ *i* $G \in s$ *i* $I \in s$ *i* $D \in s$ *i* $E \in s$ *i* $F \in s$ *pokazati da važi* $col(D,E,F)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $D \in s$ i $E \in s$ i $F \in s$ važi $col(D,E,F)$ (aksioma $D1$).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $col(D,E,F)$.

QED
