

Teoreme srednjoškolske geometrije

Hilbertov aksiomatski sistem.

Formalizovano od strane: Sana Stojanović Đurđević

Dokaz generisan uz pomoć: ArgoGeoChecker.

14.05.2016

Teorema 1 (th_7_01.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ pokazati da postoji prava p i tačka C tako da važi $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $A \neq B$ postoji prava p tako da važi $A \in p$ i $B \in p$ (aksioma I1).
2. Postoje tačka C i tačka D i tačka E tako da važi $\neg col(C, D, E)$ (aksioma I3b).
3. Važi $C \in p$ ili $C \notin p$.
4. Pretpostavimo da važi: $C \in p$.
5. Važi $D \in p$ ili $D \notin p$.
6. Pretpostavimo da važi: $D \in p$.
7. Važi $E \in p$ ili $E \notin p$.
8. Pretpostavimo da važi: $E \in p$.
9. Na osnovu činjenica $C \in p$ i $D \in p$ i $E \in p$ važi $col(C, D, E)$ (aksioma D1).
10. Na osnovu činjenica $\neg col(C, D, E)$ i $col(C, D, E)$ dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi: $E \notin p$.
12. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $E \notin p$.
13. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
14. Pretpostavimo da važi: $D \notin p$.
15. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $D \notin p$.
16. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
17. Pretpostavimo da važi: $C \notin p$.
18. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$.
19. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 2 (th_7_02.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ pokazati da postoji tačka D tako da važi $bet(B, C, D)$.*

Dokaz:

1. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
2. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
3. Na osnovu činjenica $C \notin p$ i $B = C$ važi $B \notin p$.
4. Na osnovu činjenica $B \notin p$ i $B \in p$ dobijamo kontradikciju.
5. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
6. Na osnovu činjenice $B \neq C$ postoji tačka G tako da važi $bet(B, C, G)$ (aksioma II2).

7. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $bet(B, C, G)$.

8. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 3 (th_7_03.) Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ pokazati da postoji tačka E tako da važi $bet(A, D, E)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma *III1*).
 2. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ važi $col(B, D, C)$ i $col(C, B, D)$ i $col(C, D, B)$ i $col(D, B, C)$ i $col(D, C, B)$ (aksioma *sym.col*).
 3. Na osnovu činjenice $A \neq B$ važi $B \neq A$.
 4. Na osnovu činjenica $B \neq A$ i $B \in p$ i $A \in p$ i $C \notin p$ važi $\neg col(B, A, C)$ (aksioma *D1a*).
 5. Važi $A = D$ ili $A \neq D$.
 6. Pretpostavimo da važi: $A = D$.
 7. Na osnovu činjenica $\neg col(B, A, C)$ i $A = D$ važi $\neg col(B, D, C)$.
 8. Na osnovu činjenica $\neg col(B, D, C)$ i $col(B, D, C)$ dobijamo kontradikciju.
 9. Pretpostavimo da važi: $A \neq D$.
 10. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji tačka G tako da važi $bet(A, D, G)$ (aksioma *II2*).
 11. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $bet(A, D, G)$.
12. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 4 (th_7_04.) Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ pokazati da važi $\neg col(A, B, D)$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma *III1*).
 2. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ važi $col(B, D, C)$ i $col(C, B, D)$ i $col(C, D, B)$ i $col(D, B, C)$ i $col(D, C, B)$ (aksioma *sym.col*).
 3. Važi $D \in p$ ili $D \notin p$.
 4. Pretpostavimo da važi: $D \in p$.
 5. Na osnovu činjenica $B \neq D$ i $B \in p$ i $D \in p$ i $C \notin p$ važi $\neg col(B, D, C)$ (aksioma *D1a*).
 6. Na osnovu činjenica $\neg col(B, D, C)$ i $col(B, D, C)$ dobijamo kontradikciju.
 7. Pretpostavimo da važi: $D \notin p$.
 8. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $D \notin p$ važi $\neg col(A, B, D)$ (aksioma *D1a*).
 9. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $\neg col(A, B, D)$.
10. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 5 (th_7_05.) Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ pokazati da postoji prava q tako da važi $E \in q$ i $C \in q$.

Dokaz:

1. Važi $A = C$ ili $A \neq C$.

2. Pretpostavimo da važi: $A = C$.
3. Na osnovu činjenica $C \notin p$ i $A = C$ važi $A \notin p$.
4. Na osnovu činjenica $A \notin p$ i $A \in p$ dobijamo kontradikciju.
5. Pretpostavimo da važi: $A \neq C$.
6. Na osnovu činjenice $A \neq C$ postoji prava q tako da važi $A \in q$ i $C \in q$ (aksioma I1).
7. Važi $B = C$ ili $B \neq C$.
8. Pretpostavimo da važi: $B = C$.
9. Na osnovu činjenica $C \notin p$ i $B = C$ važi $B \notin p$.
10. Na osnovu činjenica $B \notin p$ i $B \in p$ dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi: $B \neq C$.
12. Na osnovu činjenice $B \neq C$ postoji prava r tako da važi $B \in r$ i $C \in r$ (aksioma I1).
13. Važi $B = E$ ili $B \neq E$.
14. Pretpostavimo da važi: $B = E$.
15. Na osnovu činjenica $B \in r$ i $B = E$ važi $E \in r$.
16. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in r$ i $C \in r$.
17. Pretpostavimo da važi: $B \neq E$.
18. Važi $C = E$ ili $C \neq E$.
19. Pretpostavimo da važi: $C = E$.
20. Na osnovu činjenica $C \in q$ i $C = E$ važi $E \in q$.
21. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in q$ i $C \in q$.
22. Pretpostavimo da važi: $C \neq E$.
23. Na osnovu činjenice $C \neq E$ postoji prava u tako da važi $C \in u$ i $E \in u$ (aksioma I1).
24. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $E \in u$ i $C \in u$.
25. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
26. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
27. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
28. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 6 (th_7_06.) Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $\text{bet}(B, C, D)$ i $\text{bet}(A, D, E)$ i $\neg \text{col}(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ pokazati da važi $A \notin q$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $\text{bet}(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $\text{col}(A, D, E)$ i $\text{bet}(E, D, A)$ (aksioma III1).
2. Na osnovu činjenice $\text{bet}(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $\text{col}(B, C, D)$ i $\text{bet}(D, C, B)$ (aksioma III1).
3. Na osnovu činjenice $\text{col}(A, D, E)$ važi $\text{col}(A, E, D)$ i $\text{col}(D, A, E)$ i $\text{col}(D, E, A)$ i $\text{col}(E, A, D)$ i $\text{col}(E, D, A)$ (aksioma *sym.col*).
4. Na osnovu činjenice $\text{col}(B, C, D)$ važi $\text{col}(B, D, C)$ i $\text{col}(C, B, D)$ i $\text{col}(C, D, B)$ i $\text{col}(D, B, C)$ i $\text{col}(D, C, B)$ (aksioma *sym.col*).
5. Na osnovu činjenica $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ važi $\neg \text{col}(A, B, C)$ (aksioma D1a).
6. Važi $A \in q$ ili $A \notin q$.
7. Pretpostavimo da važi: $A \in q$.
8. Važi $B \in q$ ili $B \notin q$.
9. Pretpostavimo da važi: $B \in q$.

10. Na osnovu činjenica $A \in q$ i $B \in q$ i $C \in q$ važi $col(A, B, C)$ (aksioma D1).
11. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, C)$ i $col(A, B, C)$ dobijamo kontradikciju.
12. Pretpostavimo da važi: $B \notin q$.
13. Važi $D \in q$ ili $D \notin q$.
14. Pretpostavimo da važi: $D \in q$.
15. Na osnovu činjenica $C \neq D$ i $C \in q$ i $D \in q$ i $B \notin q$ važi $\neg col(C, D, B)$ (aksioma D1a).
16. Na osnovu činjenica $\neg col(C, D, B)$ i $col(C, D, B)$ dobijamo kontradikciju.
17. Pretpostavimo da važi: $D \notin q$.
18. Na osnovu činjenica $A \neq E$ i $A \in q$ i $E \in q$ i $D \notin q$ važi $\neg col(A, E, D)$ (aksioma D1a).
19. Na osnovu činjenica $\neg col(A, E, D)$ i $col(A, E, D)$ dobijamo kontradikciju.
20. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
21. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
22. Pretpostavimo da važi: $A \notin q$.
23. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $A \notin q$.
24. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 7 (th_7_07.) Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ pokazati da postoji ravan α tako da važi $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $\neg col(A, B, D)$ postoji ravan α tako da važi $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ (aksioma I4a).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$.

QED

Teorema 8 (th_7_08.) Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ pokazati da važi $C \in \alpha$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma III1).
2. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ postoji prava s tako da važi $B \in s$ i $C \in s$ i $D \in s$ (aksioma D2).
3. Na osnovu činjenica $B \neq D$ i $B \in s$ i $D \in s$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ važi $s \in \alpha$ (aksioma I6).
4. Na osnovu činjenica $s \in \alpha$ i $C \in s$ važi $C \in \alpha$ (aksioma D11).
5. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $C \in \alpha$.

QED

Teorema 9 (th_7_09.) Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ pokazati da važi $E \in \alpha$.

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A, D, E)$ i $bet(E, D, A)$ (aksioma III1).

2. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma *II1*).
3. Na osnovu činjenice $col(B, C, D)$ važi $col(B, D, C)$ i $col(C, B, D)$ i $col(C, D, B)$ i $col(D, B, C)$ i $col(D, C, B)$ (aksioma *sym.col*).
4. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji prava s tako da važi $A \in s$ i $D \in s$ (aksioma *I1*).
5. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in s$ i $D \in s$ i $A \in \alpha$ i $D \in \alpha$ važi $s \in \alpha$ (aksioma *I6*).
6. Važi $B \in q$ ili $B \notin q$.
7. Pretpostavimo da važi: $B \in q$.
8. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in q$ i $C \in q$ i $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $q \in \alpha$ (aksioma *I6*).
9. Na osnovu činjenica $q \in \alpha$ i $E \in q$ važi $E \in \alpha$ (aksioma *D11*).
10. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $E \in \alpha$.
11. Pretpostavimo da važi: $B \notin q$.
12. Važi $A = C$ ili $A \neq C$.
13. Pretpostavimo da važi: $A = C$.
14. Na osnovu činjenica $col(C, B, D)$ i $A = C$ važi $col(A, B, D)$.
15. Na osnovu činjenica $\neg col(A, B, D)$ i $col(A, B, D)$ dobijamo kontradikciju.
16. Pretpostavimo da važi: $A \neq C$.
17. Na osnovu činjenice $A \neq C$ postoji prava r tako da važi $A \in r$ i $C \in r$ (aksioma *I1*).
18. Na osnovu činjenica $A \neq C$ i $A \in r$ i $C \in r$ i $A \in \alpha$ i $C \in \alpha$ važi $r \in \alpha$ (aksioma *I6*).
19. Važi $B \in r$ ili $B \notin r$.
20. Pretpostavimo da važi: $B \in r$.
21. Važi $D \in r$ ili $D \notin r$.
22. Pretpostavimo da važi: $D \in r$.
23. Važi $E \in r$ ili $E \notin r$.
24. Pretpostavimo da važi: $E \in r$.
25. Na osnovu činjenica $r \in \alpha$ i $E \in r$ važi $E \in \alpha$ (aksioma *D11*).
26. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $E \in \alpha$.
27. Pretpostavimo da važi: $E \notin r$.
28. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in r$ i $D \in r$ i $E \notin r$ važi $\neg col(A, D, E)$ (aksioma *D1a*).
29. Na osnovu činjenica $\neg col(A, D, E)$ i $col(A, D, E)$ dobijamo kontradikciju.
30. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
31. Pretpostavimo da važi: $D \notin r$.
32. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in r$ i $C \in r$ i $D \notin r$ važi $\neg col(B, C, D)$ (aksioma *D1a*).
33. Na osnovu činjenica $\neg col(B, C, D)$ i $col(B, C, D)$ dobijamo kontradikciju.
34. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
35. Pretpostavimo da važi: $B \notin r$.
36. Važi $E \in s$ ili $E \notin s$.
37. Pretpostavimo da važi: $E \in s$.
38. Na osnovu činjenica $s \in \alpha$ i $E \in s$ važi $E \in \alpha$ (aksioma *D11*).

39. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $E \in \alpha$.
40. Pretpostavimo da važi: $E \notin s$.
41. Na osnovu činjenica $A \neq D$ i $A \in s$ i $D \in s$ i $E \notin s$ važi $\neg col(A, D, E)$ (aksioma D1a).
42. Na osnovu činjenica $\neg col(A, D, E)$ i $col(A, D, E)$ dobijamo kontradikciju.
43. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
44. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
45. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

46. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 10 (th_7_10.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $D \notin r$ i $bet(B, D, E)$ i $bet(A, E, F)$ i $\neg col(A, B, E)$ i $F \in v$ i $D \in v$ i $A \notin v$ i $A \in \gamma 2$ i $B \in \gamma 2$ i $E \in \gamma 2$ i $D \in \gamma 2$ i $F \in \gamma 2$ pokazati da važi $v \in \gamma 2$.*

Teorema 11 (th_7_11.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $D \notin r$ i $bet(B, D, E)$ i $bet(A, E, F)$ i $\neg col(A, B, E)$ i $F \in v$ i $D \in v$ i $A \notin v$ i $A \in \gamma 2$ i $B \in \gamma 2$ i $E \in \gamma 2$ i $D \in \gamma 2$ i $F \in \gamma 2$ i $v \in \gamma 2$ pokazati da važi $A \notin v$.*

Teorema 12 (th_7_12.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $bet(B, C, D)$ i $bet(A, D, E)$ i $\neg col(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $A \notin q$ pokazati da važi $B \notin q$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $bet(A, D, E)$ važi $A \neq D$ i $A \neq E$ i $D \neq E$ i $col(A, D, E)$ i $bet(E, D, A)$ (aksioma III1).
2. Na osnovu činjenice $bet(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $col(B, C, D)$ i $bet(D, C, B)$ (aksioma III1).
3. Na osnovu činjenice $bet(E, D, A)$ važi $E \neq D$ i $E \neq A$ i $D \neq A$ i $col(E, D, A)$ i $bet(A, D, E)$ (aksioma III1).
4. Na osnovu činjenice $D \neq E$ važi $E \neq D$.
5. Važi $B \in q$ ili $B \notin q$.
6. Pretpostavimo da važi: $B \in q$.
7. Važi $D \in q$ ili $D \notin q$.
8. Pretpostavimo da važi: $D \in q$.
9. Na osnovu činjenica $E \neq D$ i $E \in q$ i $D \in q$ i $A \notin q$ važi $\neg col(E, D, A)$ (aksioma D1a).
10. Na osnovu činjenica $\neg col(E, D, A)$ i $col(E, D, A)$ dobijamo kontradikciju.
11. Pretpostavimo da važi: $D \notin q$.
12. Na osnovu činjenica $B \neq C$ i $B \in q$ i $C \in q$ i $D \notin q$ važi $\neg col(B, C, D)$ (aksioma D1a).
13. Na osnovu činjenica $\neg col(B, C, D)$ i $col(B, C, D)$ dobijamo kontradikciju.
14. Teorema je dokazana u svim slučajevima.
15. Pretpostavimo da važi: $B \notin q$.
16. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $B \notin q$.
17. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 13 (th_7_13.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $\text{bet}(B, C, D)$ i $\text{bet}(A, D, E)$ i $\neg \text{col}(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $A \notin q$ i $B \notin q$ pokazati da važi $D \notin q$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenice $\text{bet}(B, C, D)$ važi $B \neq C$ i $B \neq D$ i $C \neq D$ i $\text{col}(B, C, D)$ i $\text{bet}(D, C, B)$ (aksioma III1).
2. Na osnovu činjenice $\text{bet}(D, C, B)$ važi $D \neq C$ i $D \neq B$ i $C \neq B$ i $\text{col}(D, C, B)$ i $\text{bet}(B, C, D)$ (aksioma III1).
3. Na osnovu činjenice $C \neq D$ važi $D \neq C$.
4. Važi $D \in q$ ili $D \notin q$.
5. Pretpostavimo da važi: $D \in q$.
6. Na osnovu činjenica $D \neq C$ i $D \in q$ i $C \in q$ i $B \notin q$ važi $\neg \text{col}(D, C, B)$ (aksioma D1a).
7. Na osnovu činjenica $\neg \text{col}(D, C, B)$ i $\text{col}(D, C, B)$ dobijamo kontradikciju.
8. Pretpostavimo da važi: $D \notin q$.
9. Zaključak teoreme sledi iz činjenice $D \notin q$.
10. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 14 (th_7_14.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $\text{bet}(B, C, D)$ i $\text{bet}(A, D, E)$ i $\neg \text{col}(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $A \notin q$ i $B \notin q$ i $D \notin q$ pokazati da važi prava q seče segment BD .*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $B \notin q$ i $D \notin q$ i $C \in q$ i $\text{bet}(B, C, D)$ važi prava q seče segment BD (aksioma cut_1).
2. Zaključak teoreme sledi iz činjenice prava q seče segment BD .

QED

Teorema 15 (th_7_15.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in p$ i $B \in p$ i $C \notin p$ i $\text{bet}(B, C, D)$ i $\text{bet}(A, D, E)$ i $\neg \text{col}(A, B, D)$ i $E \in q$ i $C \in q$ i $A \notin q$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $C \in \alpha$ i $E \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $A \notin q$ i $B \notin q$ i $D \notin q$ i prava q seče segment BD pokazati da postoji prava r tako da važi $\text{pash}(A, B, D, q, \alpha)$ i $D \neq A$ i $D \in r$ i $A \in r$.*

Dokaz:

1. Na osnovu činjenica $A \in p$ i $B \in p$ i $A \in p$ važi $\text{col}(A, B, A)$ (aksioma D1).
2. Na osnovu činjenica $\neg \text{col}(A, B, D)$ i $A \in \alpha$ i $B \in \alpha$ i $D \in \alpha$ i $q \in \alpha$ i $A \notin q$ i $B \notin q$ i $D \notin q$ i prava q seče segment BD važi $\text{pash}(A, B, D, q, \alpha)$ (aksioma pash_1).
3. Važi $A = D$ ili $A \neq D$.
4. Pretpostavimo da važi: $A = D$.
5. Na osnovu činjenica $\text{col}(A, B, A)$ i $A = D$ važi $\text{col}(A, B, D)$.
6. Na osnovu činjenica $\neg \text{col}(A, B, D)$ i $\text{col}(A, B, D)$ dobijamo kontradikciju.
7. Pretpostavimo da važi: $A \neq D$.
8. Na osnovu činjenice $A \neq D$ postoji prava r tako da važi $A \in r$ i $D \in r$ (aksioma I1).
9. Na osnovu činjenice $A \neq D$ važi $D \neq A$.
10. Zaključak teoreme sledi iz činjenica $\text{pash}(A, B, D, q, \alpha)$ i $D \neq A$ i $D \in r$ i $A \in r$.

11. Teorema je dokazana u svim slučajevima.

QED

Teorema 16 (th_7_16.) *Pod pretpostavkom da važi $A \neq B$ i $A \in r$ i $B \in r$ i $D \notin r$ i $\text{bet}(B, D, E)$ i $\text{bet}(A, E, F)$ i $\neg \text{col}(A, B, E)$ i $F \in v$ i $D \in v$ i $A \notin v$ i $A \in \gamma_2$ i $B \in \gamma_2$ i $E \in \gamma_2$ i $D \in \gamma_2$ i $F \in \gamma_2$ i $v \in \gamma_2$ i $A \notin v$ i $B \notin v$ i $E \notin v$ i prava v seče segment BE i $\text{pash}(A, B, E, v, \gamma_2)$ i $E \neq A$ i $E \in q_1$ i $A \in q_1$ pokazati da postoji tačka K tako da važi $\text{bet}(A, K, B)$.*
