Jednostavna karakterizacija potpunih jednočlanih skupova logičkih veznika

P. Maksimović[1] P. Janičić[2]

[1]Matematički institut
Srpska akademija nauka i umetnosti

[2]Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Argo Seminar, 2008.

Pregled

1. Uvod
   - Potpuni skupovi veznika
   - Ranija razmatranja
   - Osnovni pojmovi
2. Teorema o karakterizaciji
   - Dovoljan uslov potpunosti
   - Neophodan uslov potpunosti
   - Teorema o karakterizaciji i obrojavanje
3. Zaključak

Pregled

1. Uvod
   - Potpuni skupovi veznika
   - Ranija razmatranja
   - Osnovni pojmovi
2. Teorema o karakterizaciji
   - Dovoljan uslov potpunosti
   - Neophodan uslov potpunosti
   - Teorema o karakterizaciji i obrojavanje
3. Zaključak

Pregled

1 Uvod
- Potpuni skupovi veznika
- Ranija razmatranja
- Osnovni pojmovi

2 Teorema o karakterizaciji
- Dovoljan uslov potpunosti
- Neophodan uslov potpunosti
- Teorema o karakterizaciji i obrojavanje

3 Zaključak

Neformalna definicija i primeri.

- Potpunost – izrazivost svih iskaznih formula
- Primeri potpunih skupova veznika

$$\{\neg, \vee, \wedge\}, \quad \{\neg, \vee\}, \quad \{\neg, \wedge\},$$

$$\{\uparrow\}, \quad \{\downarrow\}$$

Neformalna definicija i primeri.

- Potpunost – izrazivost svih iskaznih formula
- Primeri potpunih skupova veznika

$$\{\neg, \vee, \wedge\}, \quad \{\neg, \vee\}, \quad \{\neg, \wedge\},$$

$$\{\uparrow\}, \quad \{\downarrow\}$$

Post-ova karakterizacija potpunosti.

- 1941. – Potrebni i dovoljni uslovi za potpunost proizvoljnih skupova veznika.
- Pet uslova pred-potpunosti (precompleteness).
- Proizvoljan skup veznika C je potpun ukoliko za svaki od uslova pred-potpunosti postoji veznik iz skupa C koji taj uslov ne zadovoljava.

Post-ova karakterizacija potpunosti.

- 1941. – Potrebni i dovoljni uslovi za potpunost proizvoljnih skupova veznika.
- Pet uslova pred-potpunosti (precompleteness).
- Proizvoljan skup veznika C je potpun ukoliko za svaki od uslova pred-potpunosti postoji veznik iz skupa C koji taj uslov ne zadovoljava.

Post-ova karakterizacija potpunosti.

- 1941. – Potrebni i dovoljni uslovi za potpunost proizvoljnih skupova veznika.
- Pet uslova pred-potpunosti (precompleteness).
- Proizvoljan skup veznika C je potpun ukoliko za svaki od uslova pred-potpunosti postoji veznik iz skupa C koji taj uslov ne zadovoljava.

Sintaksa i terminologija.

- $\mathcal{F}$ – skup veznika proizvoljne arnosti.
- $\mathrm{Fm}(\mathcal{F})$ – skup svih iskaznih formula nad $\mathcal{F}$, uz prebrojiv skup iskaznih slova $S = \{p_n | n < \omega\}$
- Ω – skup svih valuacija nad iskaznim slovima iz skupa S
- $v(A)$, $A \in \mathrm{Fm}(\mathcal{F})$, $v \in \Omega$ – vrednost formule A pri valuaciji v

Sintaksa i terminologija.

- $\mathcal{F}$ – skup veznika proizvoljne arnosti.
- $\mathrm{Fm}(\mathcal{F})$ – skup svih iskaznih formula nad $\mathcal{F}$, uz prebrojiv skup iskaznih slova $S = \{p_n | n < \omega\}$
- Ω – skup svih valuacija nad iskaznim slovima iz skupa S
- $v(A)$, $A \in \mathrm{Fm}(\mathcal{F})$, $v \in \Omega$ – vrednost formule A pri valuaciji v

Sintaksa i terminologija.

- $\mathcal{F}$ – skup veznika proizvoljne arnosti.
- $\mathrm{Fm}(\mathcal{F})$ – skup svih iskaznih formula nad $\mathcal{F}$, uz prebrojiv skup iskaznih slova $S = \{p_n | n < \omega\}$
- Ω – skup svih valuacija nad iskaznim slovima iz skupa S
- $v(A)$, $A \in \mathrm{Fm}(\mathcal{F})$, $v \in \Omega$ – vrednost formule A pri valuaciji v

Sintaksa i terminologija.

- $\mathcal{F}$ – skup veznika proizvoljne arnosti.
- $\mathrm{Fm}(\mathcal{F})$ – skup svih iskaznih formula nad $\mathcal{F}$, uz prebrojiv skup iskaznih slova $S = \{p_n | n < \omega\}$
- Ω – skup svih valuacija nad iskaznim slovima iz skupa S
- $v(A)$, $A \in \mathrm{Fm}(\mathcal{F})$, $v \in \Omega$ – vrednost formule A pri valuaciji v

Sintaksa i terminologija.

- Zadavanje veznika preko istinitosnih tablica:

p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n	$\varphi(p_1,\dots,p_n)$
0	0	$\dots$	0	0	t_0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_1	α_2	$\dots$	α_{n-1}	α_n	t_α
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\dots$	1	1	t_{2^n-1}

t_α – vrednost formule $\varphi(p_1,\dots,p_n)$ za datu valuaciju $v \in \Omega$
α – broj čija se binarna reprezentacija sastoji od cifara
$v(p_1) = \alpha_1, \dots, v(p_n) = \alpha_n$.

Formulacija dovoljnog uslova potpunosti.

Lema 1 (Dovoljan uslov potpunosti)

Ukoliko n-arni veznik ρ ispunjava uslove

- $t_0 = 1;$
- $t_{2^n-1} = 0;$
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake;*

tada skup $\{\rho\}$ *čini potpun jednočlan skup veznika.*

Formulacija dovoljnog uslova potpunosti.

Lema 1 (Dovoljan uslov potpunosti)

Ukoliko n-arni veznik ρ ispunjava uslove

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno x*, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake;*

tada skup $\{\rho\}$ *čini potpun jednočlan skup veznika.*

Formulacija dovoljnog uslova potpunosti.

Lema 1 (Dovoljan uslov potpunosti)

Ukoliko n-arni veznik ρ ispunjava uslove

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno x,* $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake;*

tada skup $\{\rho\}$ *čini potpun jednočlan skup veznika.*

Formulacija dovoljnog uslova potpunosti.

Lema 1 (Dovoljan uslov potpunosti)

Ukoliko n-arni veznik ρ ispunjava uslove

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake;*

tada skup $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan skup veznika.

Formulacija dovoljnog uslova potpunosti.

Lema 1 (Dovoljan uslov potpunosti)

Ukoliko n-arni veznik ρ ispunjava uslove

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake;*

tada skup $\{\rho\}$ *čini potpun jednočlan skup veznika.*

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Neka je dato x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da je $t_x = t_{2^n-1-x}$. Kod brojeva x i $2^n - 1 - x$ su sve binarne cifre komplementarne, pa istinitosna tablica veznika $\rho(p_1, \ldots, p_n)$ ima oblik:

p_1	p_2	$\ldots$	p_{n-1}	p_n	$\rho(p_1, \ldots, p_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	t_0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	t_x
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1 - x_1$	$1 - x_2$	$\ldots$	$1 - x_{n-1}$	$1 - x_n$	t_{2^n-1-x}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\ldots$	1	1	t_{2^n-1}

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Definišimo binarni veznik τ na sledeći način:
$\tau(p_1, p_2) \equiv \rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde je

$$A_i = \begin{cases} p_1, & \text{if } x_i = 0, \\ p_2, & \text{if } x_i = 1. \end{cases}$$

Tada istinitosna tablica veznika τ ima oblik:

p_1	p_2	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\tau(p_1, p_2) \equiv \rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	0	0	0	$\ldots$	0	t_0
0	1	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	t_x
1	0	$1 - x_1$	$1 - x_2$	$\ldots$	$1 - x_n$	$t_{2^n - 1 - x}$
1	1	1	1	$\ldots$	1	$t_{2^n - 1}$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Definišimo binarni veznik τ na sledeći način:
$\tau(p_1, p_2) \equiv \rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde je

$$A_i = \begin{cases} p_1, & \text{if } x_i = 0, \\ p_2, & \text{if } x_i = 1. \end{cases}$$

Tada istinitosna tablica veznika τ ima oblik:

p_1	p_2	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\tau(p_1, p_2) \equiv \rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	0	0	0	$\ldots$	0	t_0
0	1	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	t_x
1	0	$1 - x_1$	$1 - x_2$	$\ldots$	$1 - x_n$	$t_{2^n - 1 - x}$
1	1	1	1	$\ldots$	1	$t_{2^n - 1}$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Prema pretpostavkama, imamo da je $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$.

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\equiv \uparrow$

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\equiv \downarrow$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Prema pretpostavkama, imamo da je $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$.

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\equiv \uparrow$

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\equiv \downarrow$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Prema pretpostavkama, imamo da je $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$.

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\equiv \uparrow$

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\equiv \downarrow$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Prema pretpostavkama, imamo da je $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$.

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\equiv \uparrow$

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\equiv \downarrow$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Prema pretpostavkama, imamo da je $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$.

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\equiv \uparrow$

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\equiv \downarrow$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Prema pretpostavkama, imamo da je $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$.

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\equiv \uparrow$

Neka je $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$. Tada je $\tau \equiv$

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\equiv \downarrow$

Dokaz teoreme o dovoljnom uslovu potpunosti.

Prema pretpostavkama, imamo da je $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$.

$$\text{Neka je } t_x = t_{2^n-1-x} = 1. \text{ Tada je } \tau \equiv \begin{array}{c|c||c} p_1 & p_2 & \tau(p_1, p_2) \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \equiv \uparrow$$

$$\text{Neka je } t_x = t_{2^n-1-x} = 0. \text{ Tada je } \tau \equiv \begin{array}{c|c||c} p_1 & p_2 & \tau(p_1, p_2) \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \equiv \downarrow$$

Jedna pomoćna lema

Lema 2 (Lema o prezapisivanju)

Neka je $\{\rho\}$ *potpun jednočlani skup veznika, čiji je element n-arni veznik* ρ, *i neka ne postoji nijedno* x, $0 \leq x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake.*

Tada je formula $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, *gde* $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$, *ekvivalentna jednoj od sledećih formula:* p_1, $\neg p_1$, p_2, $\neg p_2$.

Dokaz leme o prezapisivanju

Istinitosna tablica veznika $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$ ima oblik:

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	0	1	1	α_1	α_2	$\ldots$	α_n	t_α
0	1	1	0	β_1	β_2	$\ldots$	β_n	t_β
1	0	0	1	γ_1	γ_2	$\ldots$	γ_n	t_γ
1	1	0	0	δ_1	δ_2	$\ldots$	δ_n	t_δ

Za svako A_i, imamo $\delta_i = 1 - \alpha_i$, $\gamma_i = 1 - \beta_i$,
odakle imamo $\delta = 2^n - 1 - \alpha$, $\gamma = 2^n - 1 - \beta$,
i konačno, $t_\delta = 1 - t_\alpha$, $t_\gamma = 1 - t_\beta$

Dokaz leme o prezapisivanju

Istinitosna tablica veznika $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$ ima oblik:

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	0	1	1	α_1	α_2	$\ldots$	α_n	t_α
0	1	1	0	β_1	β_2	$\ldots$	β_n	t_β
1	0	0	1	γ_1	γ_2	$\ldots$	γ_n	t_γ
1	1	0	0	δ_1	δ_2	$\ldots$	δ_n	t_δ

Za svako A_i, imamo $\delta_i = 1 - \alpha_i$, $\gamma_i = 1 - \beta_i$,
odakle imamo $\delta = 2^n - 1 - \alpha$, $\gamma = 2^n - 1 - \beta$,
i konačno, $t_\delta = 1 - t_\alpha$, $t_\gamma = 1 - t_\beta$

Dokaz leme o prezapisivanju

Istinitosna tablica veznika $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$ ima oblik:

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	0	1	1	α_1	α_2	$\ldots$	α_n	t_α
0	1	1	0	β_1	β_2	$\ldots$	β_n	t_β
1	0	0	1	γ_1	γ_2	$\ldots$	γ_n	t_γ
1	1	0	0	δ_1	δ_2	$\ldots$	δ_n	t_δ

Za svako A_i, imamo $\delta_i = 1 - \alpha_i$, $\gamma_i = 1 - \beta_i$,
odakle imamo $\delta = 2^n - 1 - \alpha$, $\gamma = 2^n - 1 - \beta$,
i konačno, $t_\delta = 1 - t_\alpha$, $t_\gamma = 1 - t_\beta$

Dokaz leme o prezapisivanju

Istinitosna tablica veznika $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$ ima oblik:

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	0	1	1	α_1	α_2	$\ldots$	α_n	t_α
0	1	1	0	β_1	β_2	$\ldots$	β_n	t_β
1	0	0	1	γ_1	γ_2	$\ldots$	γ_n	t_γ
1	1	0	0	δ_1	δ_2	$\ldots$	δ_n	t_δ

Za svako A_i, imamo $\delta_i = 1 - \alpha_i$, $\gamma_i = 1 - \beta_i$,
odakle imamo $\delta = 2^n - 1 - \alpha$, $\gamma = 2^n - 1 - \beta$,
i konačno, $t_\delta = 1 - t_\alpha$, $t_\gamma = 1 - t_\beta$

Dokaz leme o prezapisivanju

Dokaz leme dobijamo razmatranjem sledeća četiri slučaja:

1. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_1$.
2. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_2$.
3. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_2$.
4. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_1$.

Dokaz leme o prezapisivanju

Dokaz leme dobijamo razmatranjem sledeća četiri slučaja:

1. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_1$.
2. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_2$.
3. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_2$.
4. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_1$.

Dokaz leme o prezapisivanju

Dokaz leme dobijamo razmatranjem sledeća četiri slučaja:

1. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_1$.
2. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_2$.
3. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_2$.
4. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_1$.

Dokaz leme o prezapisivanju

Dokaz leme dobijamo razmatranjem sledeća četiri slučaja:

1. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_1$.
2. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_2$.
3. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_2$.
4. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_1$.

Dokaz leme o prezapisivanju

Dokaz leme dobijamo razmatranjem sledeća četiri slučaja:

1. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_1$.
2. $\{t_\alpha = 0, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 1\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_2$.
3. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 0\} \Rightarrow \{t_\gamma = 1, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_2$.
4. $\{t_\alpha = 1, t_\beta = 1\} \Rightarrow \{t_\gamma = 0, t_\delta = 0\}$, i $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_1$.

Formulacija neophodnog uslova potpunosti.

Lema 3 (Neophodan uslov potpunosti)

Ukoliko $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan sistem veznika, gde je ρ n-arni veznik, tada su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake.*

Formulacija neophodnog uslova potpunosti.

Lema 3 (Neophodan uslov potpunosti)

Ukoliko $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan sistem veznika, gde je ρ n-arni veznik, tada su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake.*

Formulacija neophodnog uslova potpunosti.

Lema 3 (Neophodan uslov potpunosti)

Ukoliko $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan sistem veznika, gde je ρ n-arni veznik, tada su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake.*

Formulacija neophodnog uslova potpunosti.

Lema 3 (Neophodan uslov potpunosti)

Ukoliko $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan sistem veznika, gde je ρ n-arni veznik, tada su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake.*

Dokaz teoreme o neophodnom uslovu potpunosti.

Ukoliko bi važilo $t_0 = 0$ ili $t_{2^n-1} = 1$, tada negacija ne bi mogla da se izrazi preko $\{\rho\}$. Dakle, mora važiti $t_0 = 1$ i $t_{2^n-1} = 0$.

Neka ne postoji x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da važi da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake. Tada, na osnovu Leme o prezapisivanju, imamo da je formula $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$, ekvivalentna sa p_1, $\neg p_1$, p_2, ili $\neg p_2$.

Na osnovu prethodnog, preko ρ nije moguće izraziti, npr., veznik $\uparrow$, pa $\{\rho\}$ ne može činiti potpun jednočlan skup veznika, odakle dobijamo tvrdjenje leme.

Teorema o karakterizaciji

Teorema 1 (Teorema o karakterizaciji)

Za dati veznik ρ, skup $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan skup veznika ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake.*

Teorema o karakterizaciji

Teorema 1 (Teorema o karakterizaciji)

Za dati veznik ρ, skup $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan skup veznika ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake.*

Teorema o karakterizaciji

Teorema 1 (Teorema o karakterizaciji)

Za dati veznik ρ, skup $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan skup veznika ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake.*

Teorema o karakterizaciji

Teorema 1 (Teorema o karakterizaciji)

Za dati veznik ρ, skup $\{\rho\}$ čini potpun jednočlan skup veznika ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji bar jedno* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake.*

Obrojavanje potpunih jednočlanih skupova veznika

Teorema 2 (Teorema o obrojavanju)

Za dati prirodan broj n, postoji tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n.

$$2^{2^n} : 2 = 2^{2^n-1}; \qquad 2^{2^n-1} : 2 = 2^{2^n-2}$$

$t_1, \ldots, t_{2^{n-1}-1}$ – za svaku od ovih vrednosti postoje po dve mogućnosti – ukupno $2^{2^{n-1}-1}$

Obrojavanje potpunih jednočlanih skupova veznika

Teorema 2 (Teorema o obrojavanju)

Za dati prirodan broj n, postoji tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n.

$$2^{2^n} : 2 = 2^{2^n-1}; \qquad 2^{2^n-1} : 2 = 2^{2^n-2}$$

$t_1, \ldots, t_{2^{n-1}-1}$ – za svaku od ovih vrednosti postoje po dve mogućnosti – ukupno $2^{2^{n-1}-1}$

Obrojavanje potpunih jednočlanih skupova veznika

Teorema 2 (Teorema o obrojavanju)

Za dati prirodan broj n, postoji tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n.

$$2^{2^n} : 2 = 2^{2^n-1}; \qquad 2^{2^n-1} : 2 = 2^{2^n-2}$$

$t_1, \ldots, t_{2^{n-1}-1}$ – za svaku od ovih vrednosti postoje po dve mogućnosti – ukupno $2^{2^{n-1}-1}$

Obrojavanje potpunih jednočlanih skupova veznika

Teorema 2 (Teorema o obrojavanju)

Za dati prirodan broj n, postoji tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n.

$$2^{2^n} : 2 = 2^{2^n-1}; \qquad 2^{2^n-1} : 2 = 2^{2^n-2}$$

$t_1, \ldots, t_{2^{n-1}-1}$ – za svaku od ovih vrednosti postoje po dve mogućnosti – ukupno $2^{2^{n-1}-1}$

Obrojavanje potpunih jednočlanih skupova veznika

Teorema 2 (Teorema o obrojavanju)

Za dati prirodan broj n, postoji tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n.

$$2^{2^n} : 2 = 2^{2^n-1}; \qquad 2^{2^n-1} : 2 = 2^{2^n-2}$$

$t_1, \ldots, t_{2^{n-1}-1}$ – za svaku od ovih vrednosti postoje po dve mogućnosti – ukupno $2^{2^{n-1}-1}$

Obrojavanje potpunih jednočlanih skupova veznika

Teorema 2 (Teorema o obrojavanju)

Za dati prirodan broj n, postoji tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n.

$$2^{2^n} : 2 = 2^{2^n-1}; \qquad 2^{2^n-1} : 2 = 2^{2^n-2}$$

$t_1, \ldots, t_{2^{n-1}-1}$ – za svaku od ovih vrednosti postoje po dve mogućnosti – ukupno $2^{2^{n-1}-1}$

Primeri

p_1	p_2	p_3	if-then-else(p_1, p_2, p_3)	
0	0	0	$t_0 = 0$	
0	0	1	$t_1 = 1$	$\leftarrow$
0	1	0	$t_2 = 0$	
0	1	1	$t_3 = 1$	
1	0	0	$t_4 = 0$	
1	0	1	$t_5 = 0$	
1	1	0	$t_6 = 1$	$\leftarrow$
1	1	1	$t_7 = 1$	

Primeri

p_1	p_2	p_3	$\rho(p_1, p_2, p_3)$	
0	0	0	$t_0 = 1$	$\leftarrow$
0	0	1	$t_1 = 0$	
0	1	0	$t_2 = 0$	
0	1	1	$t_3 = 1$	$\leftarrow$
1	0	0	$t_4 = 1$	$\leftarrow$
1	0	1	$t_5 = 1$	
1	1	0	$t_6 = 1$	
1	1	1	$t_7 = 0$	$\leftarrow$

Zaključak

- Jednostavna karakterizacija potpunosti jednočlanih skupova veznika.
- Tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n, $n \geq 1$.

F.J. Pelletier, N.M. Martin
Post's functional completeness theorem.
Notre Dame Journal Of Formal Logic, 31:462-475, 1990.

Zaključak

- Jednostavna karakterizacija potpunosti jednočlanih skupova veznika.
- Tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n, $n \geq 1$.

F.J. Pelletier, N.M. Martin
Post's functional completeness theorem.
Notre Dame Journal Of Formal Logic, 31:462-475, 1990.

Zaključak

- Jednostavna karakterizacija potpunosti jednočlanih skupova veznika.
- Tačno $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ potpunih jednočlanih skupova veznika arnosti n, $n \geq 1$.

F.J. Pelletier, N.M. Martin
Post's functional completeness theorem.
Notre Dame Journal Of Formal Logic, 31:462-475, 1990.