Koherentna logika

Sana Stojanović, Vesna Pavlović, Predrag Janičić
Matematički fakultet, Beograd, Srbija
URL: www.matf.bg.ac.yu/ ~sana, ~vesnap, ~janicic

ARGO seminar
Beograd, Srbija, Mart 18, 2009.

Plan

- Kratka istorija koherentne logike
- Definicija semantičke posledice
- Definicija relacije izvodjenja
- Svojstva koherentne logike

Koherentna logika (deo I)

- Koherentna logika prvog reda je alternativa logici rezolucije (dozvoljava ograničenu upotrebu egzistencijalnih kvantifikatora)

- Za razliku od metoda rezolucije, dokazi u koherentnoj logici su prirodni, intuitivni dokazi, rezonovanje je konstruktivističko

- Značajan broj teorija i tvrdjenja može biti zapisan direktno i jednostavno u koherentnoj logici

- Pogodna je za automatizaciju

Koherentna logika (deo II)

Izražajnost koherentne logike je negde izmedju logike rezolucije i metoda tabloa. Prednosti koherentne logike nad rezolucijom su:

- Jača veza izmedju automatskog i interaktivnog dokazivanja teorema

- Prevodjenje formule iz logike prvog reda u koherentnu logiku je mnogo lakše nego prevodjenje u KNF (ne uključuje Skolemizaciju)

- Odredjene teorije (npr. neke geometrije) mogu biti u potpunosti direktno opisane u koherentnoj logici

Koherentna logika - kratka istorija

- Skolem (1920): (problem odlučivanja teorije mreža i dokaz nezavisnosti Dezargove aksiome od ostalih aksioma projektivne geometrije ravni)

- Bezem (XXI vek): preporod koherentne logike u moderno doba, dopunio i doterao Skolemove radove

- Moderna koherentna logika, često se naziva konačna geometrijska logika

- Bezem, Hendriks (JAR 2008): Mehanizacija dokaza Hezenbergove teoreme u koherentnoj logici

Koherentna logika - definicija (deo I)

- Definicije su preuzete iz rada “Automatizacija koherentne logike”, Bezem, Coquand (Springer 2005)

- Jednosortna logika prvog reda bez funkcijskih simbola (moguće je uvodjenje funkcijskih simbola kao i tipova)

Koherentna logika - definicija (deo II)

- Fragment logike prvog reda koji se sastoji samo od implicitno univerzalno kvantifikovanih implikacija oblika $C \rightarrow D$:

$$\underbrace{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}_{C} \rightarrow \underbrace{(\exists x)E_1 \vee \ldots \vee (\exists x)E_m}_{D}$$

A_i su atomi prvog reda, E_j su konjunkcije atoma prvog reda

- Formule C, D, $C \rightarrow D$ se redom zovu koherentna konjunkcija, koherentna disjunkcija i koherentna implikacija. *Koherentna teorija* je skup koherentnih implikacija.

Relacija semantičke posledice ($\models$)

Neka je X skup činjenica (stanje), C zatvorena koherentna konjunkcija i D zatvorena koherentna disjunkcija:

- C je *tačno* u X ($X \models C$ ili $C \subseteq X$), ako se svi konjunkti iz C pojavljuju u X

- D je *tačno* u X ($X \models D$) ako za neki od disjunkata $(\exists x)C$ iz D postoji simbol konstante a takav da važi $C[x := a] \subseteq X$.

Relacija izvodjenja u teoriji T ($\vdash^T$)

- $X \vdash^T P$ (P je prva posledica u T na osnovu činjenica iz X dobijena pretragom u širinu)

  (baza indukcije): $X \vdash P$ ako je P tačno u X ($X \models P$)

  (korak indukcije): Razmatramo sve zatvorene instance aksioma $C_i \rightarrow D_i$ iz T takve da je C_i tačno u X a D_i nije. Postoji najviše konačno mnogo takvih instanci: $D_0, \ldots, D_n$ (m_i dužina od D_i za $0 \leq i \leq n$)

$$D_i \equiv \ldots \vee (\exists x_{ij}) D_{ij} \vee \ldots \quad , \; (1 \leq j \leq m_i)$$

$$\forall j_0 \in \{1, \ldots, m_0\} \ldots \forall j_n \in \{1, \ldots, m_n\} (X, \overline{D_{0j_0}}, \ldots, \overline{D_{nj_n}} \vdash P)$$

Kompletnost relacije $\vdash$

- Relacija izvodjenja $\vdash$ je kompletna u odnosu na semantiku Tarskog:

  ako važi da je $T \models \phi$ onda je i $T \vdash \phi$

Odnos koherentne logike sa logikom rezolucije (deo I)

- Korišćenje egzistencijalnih kvantifikatora (za razliku od logike rezolucije gde dokaz ne uvodi objekat sa odredjenim svojstvom već samo pomoću Skolemovih funkcija svedoči o postojanju takvog objekta)

- Vodjenje računa o uvodjenju novih objekata (novi objekti se ne uvode ako već postoji objekat koji zadovoljava zadata svojstva - za razliku od skolemizacije)

- Prostor pretrage u nekim slučajevima može biti manji

- Odredjene formule ne mogu biti zapisane direktno u koherentnoj logici (ali manje nego u slučaju metoda rezolucije) ali mogu biti preformulisane da bi se dobila koherentna forma

Odnos koherentne logike sa logikom rezolucije (deo II)

- U slučaju da nas interesuje dokaz odredjene formule, a ne samo njena valjanost, koherentna logika ima prednost nad logikom rezolucije

- Tvrdjenje se ne transformiše, dokazi su razumljivi i mogu da se “zakrpe”.

- Pogodna za automatizaciju

- Dokazi mogu biti verifikovani nezavisnim dokazivačima teorema

Zaključak

- Koherentna logika je veoma relevantna za naš rad (koristi se ista logika, ista motivacija)

- Korisne teorijske osnove

- Interesantni domeni za primene (ne samo geometrija)

Plan

- Opšte ideje i strategije za implementaciju
- Geolog jezik
- Skolemove mašine
- Implementacija - GLAM (Geometric Logic Abstract Machine)
- Zaključci i veza sa našim dokazivačem

Strategije za implementaciju

- Rezonovanje u širinu (definisano relacijom $\models$)
  - generisanje previše slučajeva
  - astronomski broj irelevantnih činjenica
- Prvo poboljšanje: korišćenje relacije $\vdash$ umesto relacije $\models$
- Rezonovanje u dubinu
  - dobijamo na brzini
  - odričemo se kompletnosti

Primer

kada je bolje koristiti strategiju rezonovanja u dubinu:

dokazati p iz $p \vee p$ kada ono prethodi mnoštvu

irelevantnih disjunkcija

kada je bolje koristiti strategiju rezonovanja u širinu:

dokazati $\exists uv(r(b,u) \wedge s(b,v))$ iz činjenica $r(a,b), s(a,b)$

korišćenjem dve aksiome:

$r(x,y) \longrightarrow \exists u.r(y,u)$

$s(x,y) \longrightarrow \exists u.s(y,u)$

Automatizacija geometrijske logike

- Korišćenje geometrijske logike za automatsko dokazivanje teorema

- Autori: John Fisher i Marc Bezem

- Služi za izražavanje geometrijske logike prvog reda u strogo zadatoj formi

- Matematička Skolemova mašina koja izračunava izvodjenja u datom jeziku

- U članku “Skolem Machines and Geometric Logic” daje se teorijski pristup problemu i opisuje dizajn apstraktne mašine i njena direktna implementacija

Geolog jezik

- Geolog jezik - jezik za izražavanje geometrijske logike u formatu pogodnom za izračunavanja koristeći apstraktnu mašinu

- Geolog pravila - instrukcije za apstraktnu mašinu koja izračunava posledice geometrijske logike i takodje ulaz za kompajler/interpreter zasnovan na apstraktnoj mašini

- Imaju formu koherentnih formula:

  $$A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow C_1; C_2; \ldots; C_n, \qquad m, n \leq 1$$

Primer

Geolog pravilo:

$$s(X,Y) \Rightarrow e(X,Y); domain(Z), r(X,Z), s(Z,Y)$$

Potpuno kvantifikovana logička formula prvog reda bi bila:

$$(\forall X)(\forall Y)[s(X,Y) \rightarrow e(X,Y) \vee (\exists Z)(r(X,Z) \wedge s(Z,Y))]$$

Specijalna pravila

- Činjenice su pravila oblika $true \Rightarrow C_1; C_2; \ldots; C_n$

- Ciljna pravila su pravila oblika $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow goal$

- Negirajuća pravila su pravila oblika $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow false$

- Konstantni termovi true, false i goal mogu se javiti u pravilima samo u opisanoj formi

- Geolog teorija T (ili program) je konačni skup Geolog pravila, zapisujemo je u obliku $T = A \cup G \cup F$, gde je G skup ciljnih, a F skup negirajućih pravila

Skolemove mašine

- Skolemovu mašinu (SM) čini konačni skup Geolog pravila koja definišu njen skup instrukcija
- Prethodnice:
  - članak Skolema
  - sistem SATCHMO (SATisfiability CHecking by MOdel generation)
- Egzistencijalnu kvantifikaciju možemo eliminisati uvodjenjem Skolemovih funkcija. Ipak:
  - skolemove funkcije menjaju značenje formule
  - skolemova funkcija ne mora biti svesna svoje simetričnosti

Procedura

- Upit: izraz koji sadrži sve disjunkte koji se javljaju kao premise nekog ciljnog ili negirajućeg pravila

- Inicijalno stanje: jedna traka na kojoj je napisano true

- Korak: na osnovu skupa Geolog pravila vrši se:
  - proširivanje trake (dodavanje logičkih termova na kraj)
  - kreiranje novih traka (kod granajućih pravila)

- Postupak se zaustavlja kada:
  - na svakoj od traka je napisano goal ili false (u ovom slučaju kažemo da teorija podržava dati upit)
  - ili se na nju više ne može primeniti nijedna nova instanca pravila

Primer

%#1 $true \Rightarrow domain(X), p(X).$

%#2 $p(X) \Rightarrow q(X); r(X); domain(Y), s(X, Y).$

%#3 $domain(X) \Rightarrow u(X).$

%#4 $u(X), q(X) \Rightarrow false.$

%#5 $r(X) \Rightarrow goal.$

%#6 $s(X, Y) \Rightarrow goal.$

Primer

---

true

$\downarrow$

---

true domain(1) p(1)

$\downarrow$

---

true domain(1) p(1) q(1)

---

true domain(1) p(1) r(1)

---

true domain(1) p(1) domain(2) s(1,2)

Primer (nastavak)

true domain(1) p(1) q(1) u(1)

true domain(1) p(1) r(1) u(1)

true domain(1) p(1) domain(2) s(1,2) u(1) u(2)

$\downarrow$

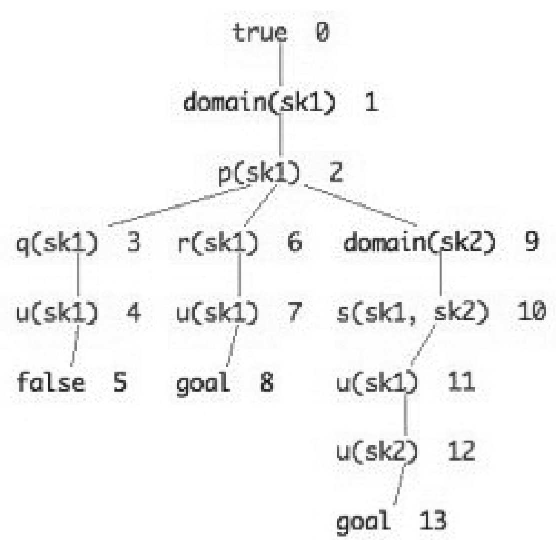
true domain(1) p(1) q(1) u(1) false

true domain(1) p(1) r(1) u(1) goal

true domain(1) p(1) domain(2) s(1,2) u(1) u(2) goal

Primer (nastavak)

Na ovaj način Skolemova mašina je efektivno izvela dokaz da je disjunkcija $(\exists X)(u(X) \wedge q(X)) \vee (\exists X)r(X) \vee (\exists X)(\exists Y)s(X,Y)$ logička posledica Geolog teorije koja sadrži prva tri pravila



Svojstva

- Važna pitanja:
  - saglasnost
  - potpunost
  - odlučivost
- Teorema 1: Ako teorija T podržava upit Q tada je Q logička posledica aksioma iz T
- Teorema 2: Ako proširimo trake korišćenjem primenljivog pravila samo ako ono već nije zadovoljeno na traci, podržani su potpuno isti upiti

Proceduralne implementacije

- Implementacije u Prologu vrlo pravolinijske

- GLAM (Geometric Logic Abstract Machine)

- Prolog prevodilac je u osnovi jednolinijski program koji imitira SM operacije

Proceduralne implementacije

- Primer: `http://www.matf.bg.ac.yu/~vesnap/primer_geolog.txt`

- Data implementacija primenjuje Geolog instrukcije u veoma striktnom top-down redoledu;
  glavna prednost joj je velika brzina izvršavanja

- Prednost Geolog interpretera koji radi rezonovanje u širinu je da redosled Geolog instrukcija nije direktna prepreka;
  mana je što se resursi za izvršavanje često potroše pre zaustavljanja

- Redosled Geolog instrukcija postaje vrlo bitan za implementaciju GLAM-a koji radi rezonovanje u dubinu

Odnos sa našim dokazivačem

- stari Euclid (Prolog, C)

- novi Euclid (C++)

- Geolog

Zaključak i dalji rad

- Pokazano je da se apstraktna mašina za implementaciju jezika za geometrijsku logiku prvog reda može uspešno staviti u rad

- Razmatra se proširivanje ovog pristupa izvan granica nametnutih geometrijskom logikom

- Prednost geometrijske logike u odnosu na ostale kandidate, kao što je rezolucijska logika