

Poseta Politehničkom univerzitetu u Valensiji

Vesna Pavlović

Matematički fakultet, Beograd

ARGO seminar, 18.11.2009.

Detalji posete

- 01.05 – 28.07.2009, Valensija, Španija
- Tempus DEUKS projekat
- ELP grupa na Politehničkom univerzitetu u Valensiji
- prof. Salvador Lucas

DEUKS

- Doctoral School towards European Knowledge Society, Tempus Project JEP - 41099 - 2006
- Članovi konzorcijuma:
 - Università degli Studi di Udine,
 - Univerzitet u Novom Sadu,
 - Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique - Sophia Antipolis,
 - Matematički institut SANU,
 - Univerzitet u Novom Pazaru i
 - Universidad Politecnica de Valencia
- Web strana: <http://cms.ns.ac.yu/deuks/>

ELP grupa, DSIC, Politehnički univerzitet u Valensiji

- Osnovan 1971. godine
- Preko 35.000 studenata, više od 40 smerova
- Departamento de Sistemas Informáticos y Computación (DSIC) broji oko 150 ljudi
- ELP grupa se bavi:
 - deklarativnim programiranjem
 - sistemima za prezapisivanje termova
 - primenama algebarskih tehnika i logika u analizi, transformisanju, verifikovanju, debugovanju, validaciji, optimizaciji programa
- Web strana: <http://users.dsic.upv.es/grupos/elp/elp.html>

Zadaci

- Teorijski deo
 - Sistemi za prezapisivanje termova; zaustavljanje
 - Metod interpretacija; linearne elementarne interpretacije; automatsko generisanje
 - Sistem za transformisanje elementarnih ograničenja; izmena tako da dobijemo zaustavljenje
- Praktičan rad
 - Testiranje sistema u praksi; pisanje programa u Prologu

Uvod

- Simbolička ograničenja $\rightarrow$ numerička ograničenja
- Popularan izbor: polinomijalne interpretacije
- *Lescanne*: elementarne interpretacije
- Mana za korišćenje u praksi: nije razmatrano automatsko generisanje ovakvih interpretacija
- *Lucas*: kombinacija prezapisivanja, CLP i CSP tehnika za rešavanje skupa elementarnih ograničenja koja dobijamo kada se simbolima dodele parametarske elementarne interpretacije

Uvod

- Analiza zaustavljanja u sistemima za prezapisivanje termova
- Dokazi zaustavljanja uključuju rešavanje simboličkih ograničenja $s \succeq t$ izmedju termova s i t
- Ova ograničenja se često tretiraju kao numerička ograničenja $[s] \geq [t]$, pri čemu su $[s]$ i $[t]$ numeričke funkcije dobijene interpretiranjem simbola f koji se javljaju u s i t numeričkom funkcijom $[f]$
- Automatski alati za testiranje zaustavljanja treba da izračunaju takve funkcije iz simboličkih ograničenja koja su pridružena problemu zaustavljanja
- U polinomijalnom slučaju simbolu f arnosti k pridružen je polinom $[f]$ oblika $a_k x_k + \dots + a_1 x_1 + a_0$

Primer

$$add(X, 0) \rightarrow X \quad (1)$$

$$add(X, s(Y)) \rightarrow s(add(X, Y)) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} [0] &= z_0 & [s](x) &= s_1x + s_0 \\ [add](x, y) &= a_1x + a_2y + a_0 \end{aligned}$$

- Promenljive u termovima s i t postaju univerzalno kvantifikovane numeričke promenljive; parametarski koeficijenti postaju egzistencijalno kvantifikovane promenljive
- Primer: za (2) imamo:

$$[add(X, s(Y))] = a_1X + a_2s_1Y + a_2s_0 + a_0$$

$$[s(add(X, Y))] = s_1a_1X + s_1a_2Y + s_1a_0 + s_0.$$

Primer(2)

$$\exists a_1, a_2, s_0, s_1, z_0 \in D \forall X, Y \in A \ a_1X + a_2s_1Y + a_2s_0 + a_0 > s_1a_1X + s_1a_2Y + s_1a_0 + s_0$$

D - domen koeficijenata,

A - semantički domen interpretacija (najčešće $N, [0, +\infty)$)

- Najveći broj alata implementira *Hong i Jakuš' kriterijum* za uklanjanje univerzalno kvantifikovanih promenljivih iz polinomijalnih ograničenja i dobijamo:

$$\exists a_1, a_2, s_0, s_1, z_0 \in D \ a_1 \geq s_1a_1 \wedge a_2s_1 \geq s_1a_2 \wedge a_2s_0 + a_0 > s_1a_0 + s_0$$

- Ideja je imati nezavisno poredjenje različitih monoma
- Nakon toga koristimo pogodni CSP/SAT-rešavač da bismo dobili konkretne vrednosti za parametarske koeficijente

Osnovni pojmovi

- Binarna relacija R na skupu A se zaustavlja (dobro je zasnovana) ako ne postoji beskonačan niz $a_1 R a_2 R a_3 \dots$
- Binarna relacija R na termovima je stabilna ako za sve termove s, t i sve supstitucije ω važi $\omega(s) R \omega(t)$ uvek kad je $s R t$
- Ako $f : A^k \rightarrow A$ kažemo da je R monotona po i -tom argumentu od f ako je $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, \dots, x_k) R f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, \dots, x_k)$ uvek kad je $x R y$; kažemo da je R monotona u odnosu na f ako je i -monotona po i -tom argumentu od f za svako $1 \leq i \leq k$

Osnovni pojmovi(2)

- Pravilo prezapisivanja je uredjen par (l, r) koji zapisujemo $l \rightarrow r$ gde su $l, r \in T(F, X)$, $l \notin X$ i $Var(r) \subset Var(l)$, X -prebrojiv skup promenljivih, F - signatura
- Sistem za prezapisivanje termova (TRS) je par (F, R) gde je R skup pravila prezapisivanja
- Problem dokazivanja zaustavljanja TRS-a je ekvivalentan tražanju za dobro-zasnovanim, stabilnim i monotonim uredjenjem $>$ na termovima (tzv redukciono uredjenje) koje je kompatibilno sa pravilima TRS-a, tj važi $l > r$ za svako $l \rightarrow r \in R$

Linearne elementarne interpretacije

- Razlika u odnosu na Lescanne-a:
 - koeficijenti nam nisu dati
 - koeficijenti mogu biti racionalni
- Veličina i kompleksnost parametarskih ograničenja direktno zavisi od oblika parametarskih funkcija koje pridružujemo funkcijskim simbolima
- Linearne elementarne interpretacije - svakom funkcijskom simbolu arnosti k pridružena je funkcija:

$$f(x_1, \dots, x_k) = A(x_1, \dots, x_k) + B(x_1, \dots, x_k)^{C(x_1, \dots, x_k)}$$

gde su $A = a_1x_1 + \dots + a_kx_k + a_0$, $B = b_1x_1 + \dots + b_kx_k + b_0$, i $C = c_1x_1 + \dots + c_kx_k + c_0$ linearni polinomi nad realnim brojevima

domen semantičkih promenljivih je $A = [0, \infty]$

Transformazioni sistem

Exponentials		
(Add basis)	$\langle C[(U + V)^W] \bowtie X \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \geq 0 \wedge V \geq 0 \wedge W \geq 1 \wedge C[U^W + V^W] \bowtie X \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Add exp)	$\langle C[U^V + W] \bowtie X \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \geq 2 \wedge V \geq 1 \wedge W \geq 1 \wedge C[U^V + U^W] \bowtie X \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Negative Exp)	$\langle U \bowtie V^{-W} \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \cdot V^W \bowtie 1 \wedge V > 0 \wedge W \geq 0 \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
Introduction		
(K-Intro)	$\langle C[K] \mid C \rangle \Rightarrow \langle C[K'] \mid C \wedge K = K' \rangle$	if $K, K' \in E(c_1, \dots, c_K)$
Decomposition		
(Add decomp)	$\langle U + V \bowtie X + Y \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \geq X \wedge V \bowtie Y \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Prod decomp)	$\langle U \cdot V \bowtie X \cdot Y \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \bowtie X \wedge V \bowtie Y \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Exp decomp)	$\langle U^V \bowtie X^Y \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \bowtie X \wedge V \geq Y \wedge U \geq 1 \wedge Y \bowtie 0 \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
Constraint		
(Constants)	$\langle K \bowtie L \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle G \mid C \wedge K \bowtie L \rangle$	if $K, L \in E(c_1, \dots, c_K), \bowtie \in \{=, \geq, >\}$
(Variables)	$\langle x \geq 0 \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle G \mid C \rangle$	
(Reflexivity)	$\langle x \geq x \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle G \mid C \rangle$	$\langle x = x \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle G \mid C \rangle$

Transformisanje ograničenja

- Prezapisujemo stanja $\langle G|C \rangle$ koja se sastoje od:
 - cilja G koji je konjunkcija elementarnih ograničenja koja uključuju i parametarske koeficijente i semantičke promenljive
 - ograničenja C koji je konjunkcija elementarnih ograničenja koja uključuju samo parametarske koeficijente
- Izračunavanje kreće od početnog stanja $\langle G|True \rangle$ i završava se ili kada se dostigne stanje $\langle \square|C \rangle$ ili stanje $\langle G'|C' \rangle$ gde nije moguće primeniti nijedan dalji korak u prezapisivanju; u slučaju uspešnog izračunavanja C je egzistencijalno ograničenje ($\exists c_1, \dots, c_k \in D \ C$) koje možemo da probamo da rešimo korišćenjem odgovarajućeg sistema za rešavanje ograničenja

Primer

$\langle X + 1 \geq X + (\frac{3}{2}X + 1)^{-X} \mid True \rangle$
 $\Rightarrow$ Add decomp $\langle X \geq X \wedge 1 \geq (\frac{3}{2}X + 1)^{-X} \mid True \rangle$
 $\Rightarrow$ Reflexivity $\langle 1 \geq (\frac{3}{2}X + 1)^{-X} \mid True \rangle$
 $\Rightarrow$ Negative Exp $\langle \frac{3}{2}X + 1 > 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid True \rangle$
 $\Rightarrow$ K-Intro $\langle \frac{3}{2}X + 1 > 0 + 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ Add decomp $\langle \frac{3}{2}X \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ K-Intro $\langle \frac{3}{2}X \geq 0 * 0 \wedge 1 > 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ Prod decomp $\langle \frac{3}{2} \geq 0 \wedge X \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ Constants $\langle X \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ Variables $\langle 1 > 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ Constants $\langle X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ Variables $\langle (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \rangle$
 $\Rightarrow$ K-Intro $\langle (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1^1 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge 1^1 = 1 \rangle$
 $\Rightarrow$ Exp decomp $\langle \frac{3}{2}X + 1 \geq 1 \wedge X \geq 0 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge 1^1 = 1 \rangle$
 $\Rightarrow$ Add decomp $\langle \frac{3}{2}X \geq 0 \wedge 1 \geq 1 \wedge X \geq 0 \mid 0 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge 1^1 = 1 \rangle$
 $\Rightarrow^*$ $\langle \square \mid 0 \mid 0 + 0 = 0 \wedge 0 * 0 = 0 \wedge \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge 1^1 = 1 \wedge 1 \geq 1 \rangle$

Moj zadatak

- Zameniti K-Introd pravilo skupom drugih pravila, takvih da za svako od njih imamo garantovano zaustavljanje
- Dobiti transformacioni sistem iste snage kao prethodni, ali koji se zaustavlja
- Hoćemo da eksplicitno utvrdimo situacije kada imamo potrebu da uvedemo neku konstantu, i po mogućstvu i vrednost za tu konstantu, ili mali skup vrednosti iz koga ona uzima vrednost

Novi transformazioni sistem(1)

Polynomials	
(Pol elim)	$(\sum_{i=0}^n A_i X^i \bowtie \sum_{i=0}^n B_i X^i \wedge G \mid C) \Rightarrow (G \mid C \wedge A_n \geq B_n \wedge \dots \wedge A_1 \geq B_1 \wedge A_0 \bowtie B_0) \quad \bowtie \in \{\geq, >\}$
(Pol elim multi)	$(\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} \bowtie \sum_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} \wedge G \mid C) \Rightarrow$ $(G \mid \bigwedge_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} \geq B_{i_1, \dots, i_k} \wedge A_{0, \dots, 0} \bowtie B_{0, \dots, 0} \wedge C) \quad \bowtie \in \{\geq, >\}$
Elimination	
(Add elim $k=k_0$)	$(\sum_{i=0}^n A_i X^i)^{C_0 + \sum_{i=1}^r C_i X^i} \bowtie \sum_{i=0}^m B_i X^i + U \wedge G \mid C) \Rightarrow$ $(\sum_{i=0}^n A_i X^i \geq 2 \wedge \overline{C_0} + \sum_{i=1}^r C_i X^i \geq 1 \wedge (\sum_{i=0}^n A_i X^i)^{k_0} \geq \sum_{i=0}^m B_i X^i \wedge$ $\wedge (\sum_{i=0}^n A_i X^i)^{\overline{C_0} + \sum_{i=1}^r C_i X^i} \bowtie U \wedge G \mid C \wedge C_0 = \overline{C_0} + k_0)$ $\bowtie \in \{\geq, >\}, A_n \neq 0, B_m \neq 0, k_0 = \lceil m/n \rceil$
(Add elim multi $k=k_0$)	$((\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k})^{C_0, \dots, 0 + \sum_{i_1, \dots, i_k} C_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}} \bowtie$ $\sum_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} + U \wedge G \mid C) \Rightarrow$ $(\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} \geq 2 \wedge \overline{C_0, \dots, 0} + \sum_{i_1, \dots, i_k} C_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} \geq 1 \wedge$ $\wedge (\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k})^{k_0} \geq \sum_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} \wedge$ $\wedge (\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k})^{\overline{C_0, \dots, 0} + \sum_{i_1, \dots, i_k} C_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}} \bowtie U \wedge G$ $\mid C \wedge C_{0, \dots, 0} = \overline{C_0, \dots, 0} + k_0)$ $\bowtie \in \{\geq, >\}, n_t = \deg_{X_t}(A), m_t = \deg_{X_t}(B), k_0 = \max_t \{\lceil m_t/n_t \rceil\}$
(Prod elim $k=k_0$)	$((\sum_{i=0}^n A_i X^i)^{C_0 + \sum_{i=1}^r C_i X^i} \bowtie \sum_{i=0}^m B_i X^i \cdot U \wedge G \mid C) \Rightarrow$ $((\sum_{i=0}^n A_i X^i)^{k_0} \bowtie \sum_{i=0}^m B_i X^i \wedge (\sum_{i=0}^n A_i X^i)^{\overline{C_0} + \sum_{i=1}^r C_i X^i} \bowtie U \wedge G \mid C \wedge C_0 = \overline{C_0} + k_0)$ $\bowtie \in \{\geq, >\}, A_n \neq 0, B_m \neq 0, k_0 = \lceil m/n \rceil$
(Prod elim multi $k=k_0$)	$((\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k})^{C_0, \dots, 0 + \sum_{i_1, \dots, i_k} C_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}} \bowtie$ $\sum_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} \cdot U \wedge G \mid C) \Rightarrow$ $((\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k})^{k_0} \bowtie \sum_{i_1, \dots, i_k} B_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} \wedge$ $\wedge (\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k})^{\overline{C_0, \dots, 0} + \sum_{i_1, \dots, i_k} C_{i_1, \dots, i_k} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}} \bowtie U \wedge G$ $\mid C \wedge C_{0, \dots, 0} = \overline{C_0, \dots, 0} + k_0)$ $\bowtie \in \{\geq, >\}, n_t = \deg_{X_t}(A), m_t = \deg_{X_t}(B), k_0 = \max_t \{\lceil m_t/n_t \rceil\}$

Novi transformazioni sistem(2)

Making exponentials		
(Exp one)	$\langle U^V \bowtie \sum_{i=0}^n A_i X^i \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \bowtie \sum_{i=0}^n A_i X^i \wedge V \geq 1 \wedge U \geq 1 \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Exp zero)	$\langle U^V \geq 1 \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \geq 1 \wedge V \geq 0 \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
Decomposition of addition		
(Add decomp left 1)	$\langle U + V \bowtie W \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \geq 0 \wedge V \bowtie W \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Add decomp left 2)	$\langle U + V \bowtie W \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \geq W \wedge V \bowtie 0 \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Add decomp right 1)	$\langle U \geq V + W \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \geq V \wedge 0 \geq W \wedge G \mid C \rangle$	
(Add decomp right 2)	$\langle U \bowtie V + W \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle 0 \geq V \wedge U \bowtie W \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
Decomposition of product		
(Prod decomp equals zero)	$\langle U \cdot V = 0 \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U = 0 \wedge G \mid C \rangle$	
(Prod decomp ge zero)	$\langle U \cdot V \bowtie 0 \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle U \bowtie 0 \wedge V \bowtie 0 \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Prod decomp if nonzero)	$\langle U \cdot V \bowtie W \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle W > 0 \wedge U \bowtie W \wedge V \bowtie 1 \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$
(Prod decomp if zero)	$\langle U \cdot V \bowtie W \wedge G \mid C \rangle \Rightarrow \langle W = 0 \wedge U \cdot V \bowtie 0 \wedge G \mid C \rangle$	$\bowtie \in \{\geq, >\}$

Primer

$$\begin{aligned} & \langle X + 1 \geq X + (\frac{3}{2}X + 1)^{-X} \mid True \rangle \\ \Rightarrow \text{Add decomp} & \langle X \geq X \wedge 1 \geq (\frac{3}{2}X + 1)^{-X} \mid True \rangle \\ \Rightarrow \text{Reflexivity} & \langle 1 \geq (\frac{3}{2}X + 1)^{-X} \mid True \rangle \\ \Rightarrow \text{Negative Exp} & \langle \frac{3}{2}X + 1 > 0 \wedge X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid True \rangle \\ \Rightarrow \text{Pol elim} & \langle X \geq 0 \wedge (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \rangle \\ \Rightarrow \text{Variables} & \langle (\frac{3}{2}X + 1)^X \geq 1 \mid \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \rangle \\ \Rightarrow \text{Exp zero} & \langle \frac{3}{2}X + 1 \geq 1 \wedge X \geq 0 \mid \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \rangle \\ \Rightarrow \text{Pol elim} & \langle X \geq 0 \mid \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge 1 \geq 1 \rangle \\ \Rightarrow \text{Variables} & \langle \square \mid \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 1 > 0 \wedge 1 \geq 1 \rangle \end{aligned}$$

Program - kodiranje termova

```
/* arithmetic operators: unary and binary */
unOp(-).
binOp(+).
binOp(*).
binOp(^).

/* semantic variables */
semVar(X) :- var(X), fail, !.
semVar(x).
semVar(y).
semVar(z).
semVar(u).
semVar(v).
semVar(w).

/* EP terms */
epTerm(X) :- var(X), !.
epTerm(X) :- number(X), !.
epTerm(X) :- semVar(X), !.
epTerm([Op,X1]) :- unOp(Op), epTerm(X1), !.
epTerm([Op,L,R]) :- binOp(Op), epTerm(L), epTerm(R), !.
```

Program - kodiranje pravila transformacije

```

/*****/
/* decomposition */

/* add decomp */
transform(state([H|T],C),state([H1,H2|T],C)) :-
    H = [CompOp,L,R],
    L = [+ ,U,V], R = [+ ,X,Y],
    H1 = [>=,U,X],
    H2 = [CompOp,V,Y],
    write('-> add decomp').

/* exp decomp */
transform(state([H|T],C),state([H1,H2,H3,H4|T],C)) :-
    H = [CompOp,L,R],
    L = [^,U,V], R = [^,X,Y],
    H1 = [CompOp,U,X],
    H2 = [>=,V,Y],
    H3 = [>=,U,1],
    H4 = [CompOp,Y,0],
    write('-> exp decomp').
/*****/
```

Primer izlaza

prove([[>=, [+ ,x,1], [+, x, [^, [+ , [* ,1.5,x], 1], [- ,x]]]]).

```
{(x+1) >= (x+(((1.5*x)+1)^(-x))), | True } -> add decomp
{x >= x, 1 >= (((1.5*x)+1)^(-x)), |} -> reflexivity 1
{1 >= (((1.5*x)+1)^(-x)), |} -> negative exp
{(1*(((1.5*x)+1)^x)) >= 1, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |} -> prod decomp if nonzero
{1 > 0, 1 >= 1, (((1.5*x)+1)^x) >= 1, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |} -> constants
{1 >= 1, (((1.5*x)+1)^x) >= 1, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1 > 0, } -> constants
{(((1.5*x)+1)^x) >= 1, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1 > 0, } -> exp as zero
{((1.5*x)+1) >= 1, x >= 0, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1 > 0, } -> add decomp left 1
{(1.5*x) >= 0, 1 >= 1, x >= 0, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1 > 0, } -> prod decomp ge zero
{1.5 >= 0, x >= 0, 1 >= 1, x >= 0, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1 > 0, } -> constants
{x >= 0, 1 >= 1, x >= 0, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> variables
{1 >= 1, x >= 0, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> constants
{x >= 0, ((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> variables
{((1.5*x)+1) > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> add decomp left 1
{(1.5*x) >= 0, 1 > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> prod decomp ge zero
{1.5 >= 0, x >= 0, 1 > 0, x >= 0, |1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> constants
{x >= 0, 1 > 0, x >= 0, |1.5 >= 0, 1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> variables
{1 > 0, x >= 0, |1.5 >= 0, 1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> constants
{x >= 0, |1 > 0, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, } -> variables
{|1 > 0, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1.5 >= 0, 1 >= 1, 1 > 0, }
```

Proved

Razno



Razno



Razno



Razno

